The Indian Elementary Arithmetic

FOR VERNACULAR SCHOOLS FOR BOYS

PARTS I & II

(For use in Classes III & IV)

BY

K. C. BHATTACHARYA M.Sc. L.T.

Principal Training College, Agra

हिन्दुस्तानी प्रारम्भिक अंकगणित

(लड़कों के वर्नाक्यूलर स्कूलों के लिए)

पहला और दूसरा भाग

(कक्षा ३ और ४ के लिए)

ALLAHABAD

THE INDIAN PRESS, LTD.

19[illegible]5

Printed and published by K. Mittra, at The Indian Press, Ltd.,
Allahabad.

PREFACE

This book consisting of two parts is intended for the use of Classes III and IV of Vernacular Schools for Boys, and si in continuation of Parts I and II of the Indian Elementary Arithmetic approved by the Education Department for use in Vernacular Schools for Boys in U. P. In the preparation of this book also the author has endeavoured to treat the subject as a reasoning process rather than as an application of mechanical rules. The entire subject-matter of this book has been so treated as to bring its treatment into conformity with modern views on the teaching of Arithmetic both as regards matter and method.

Of the many notable features of this book may be mentioned the following:—

(1) The principles underlying arithmetical processes have been clearly explained, not deductively but inductively.

(2) Each section of the work has been introduced as far as possible by means of preparatory experimental work and a large number of mental exercises involving problems of a practical nature.

(3) Each topic has been invariably broken up into simplest possible stages arranged in a logical sequence, each of them being then taken up and thoroughly mastered one at a time before proceeding to the next, *e.g.*, in teaching L. C. M., Vulgar Fractions, idea of Proportion and Simple Interest.

(4) The most distinguishing feature of this book, which is rarely to be found in any Arithmetic for Vernacular Schools is the entirely new and the most modern treatment of the chapter on Vulgar Fractions which has been introduced quite in an informal way, not through diagrams to be examined by the pupils but mainly through practical work to be done by the pupils themselves and involving

exercises on measurement and drawing with the foot rule, paper-folding and paper-cutting, and also through a large number of oral exercises based on the foot rule and various kinds of concrete quantities The further treatment of fractions has also been based on exactly similar lines—each general rule to be arrived at by pupils themselves from experimental work and also from a large number of particular examples worked out in the class room.

(5) The examples are a special feature of the book They have been made as interesting as possible. Exercises of a formal and mechanical character with large numbers have been introduced only where a certain amount of "drill" is necessary All the exercises on the application of fundamental processes are questions such as are likely to be met with by boys in every-day life care has been taken to relate them to matters within the experience of boys and to employ such numbers as are likely to occur in practice.

(6) Questions involving abstract numbers have been reduced to an irreducible minimum, and small concrete quantities have been used instead throughout the book

(7) There is a large number of revision examples starting with notation, numeration, and the four simple rules at the beginning of each part and also a large number of miscellaneous examples at the end

(8) The special needs and requirements of boys in Vernacular Primary Schools and the attainments of teachers in these schools have been constantly kept in view throughout the preparation of this Book, so that even untrained or inexperienced teachers also may not find any difficulty in following the right method of presentation of even the more difficult topics in Arithmetic.

(9) This book has been prepared strictly in conformity with the requirements of the United Provinces Education Department

विषय-सूची

पहिला भाग

विषय पृष्ठ

पहिला अध्याय

दूसरा अध्याय

तीसरा अध्याय

चौथा अध्याय

दूसरा भाग

पहला अध्याय

विषय पृष्ठ

दूसरा अध्याय

तीसरा अध्याय

चौथा अध्याय

पाँचवाँ अध्याय

छठा अध्याय

सातवाँ अध्याय

पहला भाग

अध्याय १

दुहराने के लिए प्रश्न

(संख्याओं का लिखना और पढ़ना)

अभ्यास १

(१) निम्नलिखित संख्याओं को शब्दों में लिखो :—

३७०९, ७५०९६, ४३२७०७, ३८०९५०४, १०००३५९८, ९१७८६५३२, ३२०९८६०४५

(२) निम्नलिखित संख्याओं को अंकों में लिखो :—

पाँच हज़ार छत्तीस, तेंतालीस हज़ार नौ सौ नौ, छः लाख दो सौ पाँच, चवालीस लाख अड़तालीस, तीन करोड़ तीन सौ तीन, तीस करोड़ छः सौ छः ।

(३) निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक में ७ का स्थानीय मान बताओ :—

७०३, ४७६०५, ६६०७, ३०७२, १७६५४३, २७८९६०५०९।

(४) १०३५०७०५० में प्रत्येक शून्य का आशय बताओ।

(५) निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक में कितनी दहाइयाँ हैं:—

५००, ६०१०, ९९८६०, ६००७००, ७०८५७० ?

(६) निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक में कितने सैकड़े हैं:—

७००००, ५०६००, ६७०००, ९००९०० ?

(७) चार सौ सैकड़े में कितने हज़ार होते हैं ?

(८) ६०० हज़ार में कितने लाख होते हैं ?

(९) कौन-सी संख्या में एक जोड़ने से १०, १००, १०००, १००००, १००००० हो जाता है ?

(१०) पाँच अङ्कों से बनी हुई बड़ी से बड़ी और छोटी से छोटी संख्या बताओ।

चारों साधारण नियम

अभ्यास २ (ज़बानी)

(१) एक आदमी ने पहले महीने में २५ रु०, दूसरे में ३३ रु० और तीसरे में ४२ रु० कमाये। तो बताओ उसने तीनों महीनों में कितना कमाया।

(२) यदि एक कक्षा में ३३, दूसरे में ३५, तीसरे में ४० और चौथे में ४८ छात्र हैं, तो कुल कक्षाओं में कितने छात्र हैं ?

(३) तुम ६५ रुपये लेकर बाजार गये और तुमने २३ रुपये खर्च कर डाले। तुम्हारे पास क्या शेष रहा ?

(४) एक कक्षा में ६९ छात्र थे। ९ छात्र परीक्षा में सम्मिलित नहीं हुए और ७ छात्र उत्तीर्ण नहीं हुए। बताओ कितने छात्र उत्तीर्ण हुए।

(५) एक सप्ताह में ७ दिन होते हैं। तो ३५ सप्ताह में कितने दिन होंगे ?

(६) ९ रुपये प्रतिमन की दर से ५९ मन शक्कर का मूल्य बताओ।

(७) यदि मालगाड़ी के एक डिब्बे में ३६० मन कोयला आता है तो १५ डिब्बों में कितना कोयला आवेगा ?

(८) यदि कोयला का मूल्य ८ आने प्रतिमन हो तो तुमको १६ रुपये में कितना कोयला मिलेगा ?

(९) तुम एक सन्दूक में से जिसमें १२७५ रुपये हैं ७ रुपये कितनी बार निकाल सकते हो ?

(१०) एक संख्या को ८ से गुणा करने पर गुणनफल ७२ आता है। तो वह संख्या बताओ।

अभ्यास ३

(१) आम की तीन ढेरियाँ लगी हुई थीं। एक ढेरी में १५९६ आम, दूसरी में ६७०८ आम और तीसरी में ४९६८ आम थे। कुल ढेरियों में कितने आम थे ?

(२) एक मनुष्य सन् १८९५ ई० में पैदा हुआ था। तो बताओ सन् १९३० ई० में जन्मदिन पर उसकी आयु कितनी होगी।

(३) एक नगर में १२३४५ हिन्दू, ८७९३ मुसलमान, और ५६३ ईसाई हैं। तो उस नगर की जन-संख्या बताओ।

(४) एक दूकानदार के पास ७५२१ रु० थे। उसने ४२३१ रुपये के चावल और २१५५ रु० के चने ख़रीद लिये। तो बताओ उसके पास कितना धन शेष रहा।

(५) कुछ नारङ्गियाँ तीन मनुष्यों में बाँटी गई। पहले को ५९३४, दूसरे को ३१५९ और तीसरे को पहले दोनों के अन्तर की दूनी नारङ्गियाँ मिलीं। तो कुल कितनी नारङ्गियाँ बाँटी गईं?

(६) दो संख्याओं का जोड़ ५६७८९ है और उनका अन्तर ५२३ है। उन संख्याओं को बताओ।

(७) उन संख्याओं का जोड़ बताओ जो ७, ९, ०, इन तीन अङ्कों से बन सकती हैं।

(८) ६ अङ्कों से बनी हुई सबसे बड़ी और सबसे छोटी संख्याओं का अन्तर बताओ।

(९) दो संख्याओं का अन्तर ३६०७ है और छोटी संख्या ४३६९ है। तो बड़ी संख्या बताओ।

(१०) निम्नलिखित में छूटे हुए अङ्कों को लिखो :—

३४*७२	*३५७२
१*४५९	४०*३५
९८७*५	*१२३
६१३*	५६७*९
*७८९६	८७६५*
२११५८३	२०७१७३

(११) यदि एक घोड़े का मूल्य ३७५ रुपये हो तो १२५ घोड़ों का मूल्य बताओ।

(१२) यदि ६७५ मन शकर का मूल्य ६०७५ रुपये हो तो एक मन शकर का मूल्य बताओ।

(१३) ६७९३ में ७८ कितनी बार शामिल है और शेष क्या रहेगा?

(१४) वह संख्या बताओ जिसको यदि ३४६ से भाग दें तो लब्धि १३९ और शेष १७१ रहे।

(१५) वह छोटी से छोटी संख्या बताओ जिसको यदि ८६७६ में जोड़ दें तो योग ८५ से पूरा विभाजित हो जाय।

(१६) ३७५६ को ३२१६ से दो पंक्तियों में गुणा करो।

(१७) १२३४५ को ८०४१६ से तीन पंक्तियों में गुणा करो।

(१८) ५६३ को ४६ से गुणा करो और अपने हल की सहायता से
(अ) ५६३ × ८६ (ब) ५६३ × २३ (स) ५६३ × ४३
(द) ५६३ × ८३ का मान निकालो।

(१९) एक संख्या को ६ से भाग देने पर ४ शेष रहा और लब्धि को ९ से भाग देने पर ५ शेष और २३ लब्धि रहा। तो वह संख्या बताओ।

(२०) वह छोटी से छोटी संख्या बताओ जिसको ८९७०६५ में से घटा दें तो शेष ४३६ से पूरा पूरा विभाजित हो जाय।

चारों मिश्र नियम

अभ्यास ४ (ज़बानी)

(१) पाइयाँ बनाओ :—

४ आने ६ पा०, ८ आ० ३ पा०, १० आ० ९ पा०, १२ आ० ६ पा० और १५ आ० ३ पा० के।

(२) आने और पाई बनाओ :—

८७ पा०, ६६ पा०, ७५ पा०, १२९ पा० और १४७ पा० के।

(३) छटाँक बनाओ :—

२ सेर ८ छटाँक, ३ से० ५ छ०, ५ से० ९ छ०, ९ से० ११ छ० और १२ से० १५ छ० के।

(४) सेर और छटाँक बनाओ :—

४० छटाँक, ५५ छ०, १०७ छ०, १४८ छ० और १९९ छ० के।

(५) इञ्च बनाओ :—

२ फ़ुट ९ इ०, ४ फ़ु० ३ इ०, २ गज़ १ फ़ु०, ३ ग० २ फ़ु० ६ इ० और ४ ग० १ फ़ु० ९ इ० के।

(६) फुट और इञ्च बनाओ :—

४० इ०, ६३ इ०, ९० इ०, ११४ इ० और १५३ इ० के।

(७) दिन बनाओ :—

२ सप्ताह ३ दिन; ५ स० ६ दि०; १ मास ३ स० २ दिन; २ मास ४ दिन और ९ मास १० दिन के।

(८) एक लड़के ने सोमवार को ४ आ० ६ पा० और मङ्गलवार को ५ आने ३ पा० कमाये। बताओ दोनों दिनों में उसने कितना कमाया।

(९) एक लड़के को तीन किताबें खरीदनी थीं। एक का मूल्य ८ आ० ६ पा०, दूसरी का ११ आ० ६ पा० और तीसरी का १२ आ०। तो तीनों किताबों को खरीदने के लिए उसे कितने दामों की आवश्यकता थी?

(१०) एक मनुष्य ५ रु० ८ आ० लेकर बाजार गया। उसने ३ रु० १२ आ० खर्च किये। तो उसके पास क्या बच रहा?

(११) यदि ३ मन १५ सेर आटे में से तुम १ मन २० सेर दे डालो तो तुम्हारे पास कितना रहेगा?

(१२) यदि ५ गज़ २ फ़ु० ३ इ० कपड़े के टुकड़े मे से २ गज़ १ फ़ु० ६ इञ्च का टुकड़ा निकाल लिया जाय तो जो टुकड़ा बच रहेगा उसकी लम्बाई क्या होगी?

(१३) यदि एक लड़का ४ आ० ६ पा० प्रतिदिन कमाता है तो (१) एक सप्ताह में (२) एक महीने में कितना कमा लेगा?

(१४) १ रु० ८ आ० प्रतिसेर की दर से १२ सेर मक्खन के दाम बताओ।

(१५) यदि एक कुर्सी के दाम ४॥) हों तो १६ कुर्सियों के क्या दाम होंगे ?

(१६) यदि एक लड़का प्रतिमास १ रु० १५ आ० ६ पा० खर्च करता है तो एक दिन में वह कितना खर्च करता है ?

(१७) ३ गज लकड़ी के एक लट्ठे का दाम १ रु० १४ आ० है। तो १ फ़ुट के क्या दाम होंगे ?

(१८) एक आदमी दस रुपए का एक नोट लेकर बाजार गया। वहाँ उसने १ रु० २ आ० प्रति गज की दर से ६ गज कपड़े के दाम दिये। बताओ वह उस नोट में से कितने दाम लौटा कर लाया।

(१९) एक टीन में १८ सेर तेल है। तो उसमें से बारह बारह छटाँक की कितनी बोतलें भर सकते हैं ?

(२०) यदि ९ मन लकड़ी के दाम ५ रु० १० आ० हो तो (१) १ मन (२) १ सेर के क्या दाम होंगे ?

अभ्यास ५

(१) एक आदमी ने ५०॥।-) के चावल, १६॥) ९ पा० की दाल, ६०॥=) ६ पा० का घी और ८।=) ९ पा० का आटा खरीदा। बताओ उसने कुल कितना खर्च किया।

(२) एक बनिये ने ३० मन १० सेर चावल, १५ मन १० सेर ५ छ० घी, २० मन ९ सेर १० छ० दाल और ७२ मन १२ सेर १५ छ० तेल ख़रीदा। उसने कुल कितने वज़न का माल ख़रीदा ?

(३) एक रेलगाड़ी पहले घण्टे में ३५ मील ४ फर्लांग ११० गज़, दूसरे घण्टे में ३२ मी० ७ फ० ९५ गज़ और तीसरे घण्टे में ३६ मी० ३ फ० १८२ गज़ चली। तो बताओ रेल-गाड़ी ३ घण्टे में कितनी चली।

(४) ३५६७ रु० १४ आ० के ऋण में से ९६३ रु० १० आ० पहले वर्ष दे दिये गये और २३६० रु० ८ आ० दूसरे वर्ष दिये गये। तो बताओ कितना ऋण और देना शेष रहा।

(५) एक घोसी ने २५ मन दूध ११५ रु० १० आ० ६ पा० का ख़रीदा और उसे १२० रु० ८ आ० में बेच दिया। तो बताओ उसे क्या लाभ या हानि हुई।

(६) आनन्दप्रसाद को उसके पिता ने पहले ३१७ रु० १० आ० ६ पा० और फिर ५६० रु० ९ आ० दिये। तो बताओ १००० रु० की रक़म पूरी करने के लिए उसको और कितने रुपये की आवश्यकता रही।

(७) १६ गज़ २ फ़ुट ३ इञ्च लम्बे कपड़े के थान में से २ क़मीज़ें बनाई गईं। यदि प्रति क़मीज़ में ३ ग० १ फ़ुट ६ इ० कपड़ा लगा तो थान में से अब कितना कपड़ा बच रहा ?

(८) एक घर में किसी एक सप्ताह में ६ मन चावल ख़र्च हुआ।

लेकिन रविवार से आरम्भ करके पहले चार दिन में ३ मन १० से० ९ छ० और शेष चार दिन में ४ मन २५ सेर ११ छटाँक चावल खर्च हुआ। बताओ कि बुधवार के दिन कितना चावल उठता है।

(९) यदि एक मजदूर प्रतिसप्ताह ४॥–) ६ पा० कमाता है तो ९ मजदूर ४ सप्ताह में कितना कमा लेंगे ?

(१०) १८ मन चावल के दाम ४=) ६ पा० प्रतिमन की दर से निकालो।

(११) यदि ३२ मन शकर के दाम ४४० रुपये हों तो १ सेर शकर के दाम निकालो।

(१२) १४॥।=)६ पा० को तीन लड़कों में इस प्रकार बाँटो कि दूसरे को पहले का दूना और तीसरे को दूसरे का तिगुना मिले।

(१३) एक टालवाले ने ३६ पेड़ २≡) ६ पा० प्रतिपेड़ की दर से खरीदे और १=) प्रतिपेड़ की दर से मजदूरी दी। तो कुल पेड़ों पर उसने कितना खर्च किया ?

(१४) यदि एक घोड़े को प्रतिदिन ३ सेर चना खाने को दिया जाय तो ३८ घोड़ों का १२ सप्ताह के लिए इसी हिसाब से कितना चना चाहिए ?

(१५) जो रेलगाड़ी प्रतिसेकण्ड २२ गज चलती है उसकी प्रति-घण्टे कितने मील की चाल है ?

(१६) यदि एक कीड़ा एक मिनट में केवल १ इञ्च चल सकता है तो वह ५ घण्टे ४५ मिनट में कितना चलेगा ?

(१७) यदि किसी गाड़ी के पहिये की परिधि ४ गज़ १ फु० ६ इञ्च है तो ४५० गज़ चलने में वह कितने चक्कर करेगा ?

(१८) यदि १ मन चावल का दाम ७।।।=) ६ पा० हो तो ८ सेर के दाम बताओ ।

(१९) एक मनुष्य प्रतिमास ४५० रु० कमाता है। यदि प्रति-दिन वह १३ रु० २ आ० व्यय करे तो वह ४ महीने में कितना धन बचा लेगा ?

(२०) आम के पेड़ों की १२ पंक्तियाँ हैं और प्रत्येक पंक्ति में ९ पेड़ हैं। यदि प्रत्येक पेड़ पर ३६ आम हैं तो बताओ कि आमों की कुल संख्या क्या है।

(२१) यदि एक मनुष्य प्रतिघण्टा ३ मील चल सकता है तो वह (१) एक मिनट में (२) एक सेकण्ड में कितना चल सकता है ?

(२२) एक लड़का पाँच मिनट में ३०१ क़दम चलता है। यदि प्रत्येक क़दम में वह २ फ़ुट ६ इञ्च चलता है तो बताओ कि वह एक घण्टे में कितना चलता है।

(२३) एक मनुष्य प्रतिमास २२५ रु० कमाता है और अपनी आय का चौथाई भाग फ़क़ीरों में बाँट देता है। यदि एक वर्ष में ५४० फ़क़ीरों को उससे सहायता मिलती है तो बताओ प्रत्येक फ़क़ीर को कितना धन मिलता है।

(२४) ऐसी लोहे की एक छड़ की लम्बाई क्या होगी जिसमें से ३ इञ्च वाली १७६९ कील बनाई जा सकती हैं ?

(२५) यदि ६ घोड़े २० दिन में १० मन २० सेर चना खाते हैं तो १५ घोड़ों के लिए ९ दिन में कितना चना चाहिए ?

पहाड़ों पर अभ्यास

(२० × २$\frac{१}{२}$ तक)

अभ्यास ६ (ज़बानी)

(१) यदि एक पुस्तक का मूल्य $\frac{१}{४}$ रु० हो तो ४ पुस्तकों, ६ पुस्तकों, ९ पुस्तकों, १२ पुस्तकों, १५ पुस्तकों, १८ पुस्तकों, और २० पुस्तकों का मूल्य बताओ।

(२) यदि एक पेन्सिल का मूल्य $\frac{१}{२}$ आ० हो तो २ पेन्सिलों, ४ पेन्सिलों, ७ पेन्सिलों, ११ पेन्सिलों, १३ पेन्सिलों, १६ पेन्सिलों, १९ पेन्सिलों, और २० पेन्सिलों का क्या मूल्य होगा ?

मूल्य बताओ:—

(३) $\frac{३}{४}$ रु० प्रतिगज़ की दर से ७ गज़ कपड़े का।
(४) १$\frac{१}{४}$ रु० ,, ,, १२ गज़ ,, ।
(५) १$\frac{१}{२}$ रु० ,, ,, १५ गज़ ,, ।
(६) २$\frac{१}{२}$ रु० ,, ,, १७ गज़ रेशम का।
(७) १$\frac{१}{४}$ आ० प्रतिसेर की दर से १८ सेर नमक का।
(८) $\frac{३}{४}$ आ० प्रतिछटाँक की दर से १९ छटाँक घी का।

(९) मान बताओ:—

६ रु० का ३/४, ५ सेर का ३/५, ८ मन का १ ३/४, १८ छटाँक का १ ३/२, १४ फ़र्लांग का १ ३/२, १८ फ़ुट का २ ५/६, ३/४ रुपये का ९ गुना, १ ३/४ सेर का १५ गुना, २ ३/५ फ़ुट का १४ गुना और १ ३/२ इञ्च का १९ गुना।

(१०) एक लड़के ने ३ सेर नमक ३/४ आने की दर से और ५ सेर आलू १ ३/४ आने की दर से खरीदे। बताओ उसने कितना खर्च किया।

(११) ६ इञ्च लम्बी पेन्सिल में से उसका ३/४ भाग कट गया। अब वह पेन्सिल कितनी लम्बी रह गई?

(१२) यदि रुई का भाव २ ३/४ सेर प्रतिरुपया हो तो ३७ ३/२ सेर रुई की कितनी क़ीमत होगी?

(१३) १ फ़ुट के पैमाने में ३/४ इञ्च लम्बे कितने भाग होंगे?

(१४) एक बरतन १ ३/२ सेर दूध से पूरा पूरा भर जाता है। तो बताओ २२ ३/२ सेर दूध रखने के लिए ऐसे कितने बरतनों की आवश्यकता होगी।

(१५) एक फल बेचनेवाले ने १ ३/४ रु० प्रतिसैकड़ा की दर से १६०० आम खरीदे और २ ३/२ रु० प्रतिसैकड़ा की दर से उन्हें बेंच डाला। तो उसे क्या लाभ हुआ?

(१६) यदि १७ ३/२ रुपये को ७ लड़कों में बराबर बराबर बाँटें तो प्रत्येक को क्या मिलेगा?

(१७) एक घोसी के पास ढाई ढाई सेर के दूध की ८ हाँडी थीं। अगर उसने उनमें से १/४ सेर दूधवाली १८ हाँडी भर कर बेच डालीं तो अब उसके पास कितना दूध बच रहा ?

(१८) यदि एक लड़का ३० दिन के महीने में २१/२ घण्टे रोज़ के हिसाब से आधे महीने और फिर आधे महीने ११/२ घण्टे रोज़ के हिसाब से पढ़े तो महीने भर में वह कितने घण्टे पढ़ेगा ?

(१९) ३/४ रु० के १७ गुने और १/२ रु० के ८ गुने में क्या अन्तर है ?

(२०) यदि १९ फ़ुट लम्बी रस्सी में से ३/४ फ़ुट के १८ टुकड़े काट लें तो कितनी रस्सी बच रहती है ?

अध्याय २

गुणनखण्ड और रूढ़ संख्यायें

तुमको गुणा के पहाड़े से यह बात ज्ञात हो चुकी है कि:—

२ = १ × २

३ = १ × ३

४ = २ × २

५ = १ × ५

६ = २ × ३

७ = १ × ७

८ = २ × ४ = २ × २ × २

९ = ३ × ३

१० = २ × ५

१२ = २ × ६ = २ × २ × ३

१८ = २ × ९ = २ × ३ × ३

३० = २ × १५ = २ × ३ × ५

उपरोक्त उदाहरणों में

२	गुणनफल	है	२	और	१	का
३	"	"	३	"	१	"
४	"	"	२	"	२	"
५	"	"	५	"	१	"

६	गुणनफल	है	२	और	३	का
७	,,	,,	७	,,	१	,,
८	,,	,,	२	,,	४	,, या २, २ और २ का
९	,,	,,	३	,,	३	,,
१०	,,	,,	२	,,	५	,,
१२	,,	,,	२	,,	६	,, या २, २ और ३ का
१८	,,	,,	२	,,	९	,, या २, ३ और ३ का
३०	,,	,,	२	,,	१५	,, या २, ३ और ५ का।

तुम देखते हो कि आरम्भ में बिलकुल बाईं ओर जो संख्या है वह कम से कम २ संख्याओं का गुणनफल है, और अन्त की तीन संख्यायें दो से अधिक संख्याओं का गुणनफल है।

ये छोटी संख्याये अपने गुणनफल के गुणनखण्ड कहलाती हैं। इसलिए गुणनखण्ड की परिभाषा निम्नलिखित हुई:—

जब दो या दो से अधिक संख्यायें आपस में गुणित होती हैं तो वे अपने गुणनफल के गुणनखण्ड कहलाती हैं।

उपरोक्त उदाहरणों से तुम यह भी देखोगे कि प्रत्येक संख्या अपने गुणनखण्डो से बिलकुल ठीक विभाजित हो जाती है, कुछ शेष नहीं रहता।

इस प्रकार गुणनखण्ड की निम्नलिखित परिभाषा भी हो सकती है:—

किसी संख्या का गुणनखण्ड वह संख्या है जिससे कि दी हुई संख्या बिना शेष छोड़े हुए विभाजित हो जाती है।

उपरोक्त उदाहरणों में तुमने यह देखा होगा कि कुछ संख्यायें अर्थात् १, २, ३, ५, ७, आदि ऐसी हैं कि वे केवल अपने से अथवा इकाई से पूरी पूरी बँट जाती हैं। ऐसी संख्याओं को रूढ़ संख्या कहते हैं।

कुछ ऐसी संख्यायें होती हैं जैसे ४, ६, ८, ९, १०, १२, १८, ३०, जो कि दो या दो से अधिक रूढ़ संख्याओं से पूरी पूरी बँट जाती हैं। ऐसी संख्याओं को यौगिक संख्या कहते हैं।

इस प्रकार रूढ़ संख्या और यौगिक संख्या की परिभाषा निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं :—

रूढ़ संख्या ऐसी संख्या है जो अपने और इकाई को छोड़ कर किसी दूसरी संख्या से विभाजित न हो सके, और यौगिक संख्या वह है जो दो या दो से अधिक संख्याओं से पूरी पूरी बँट जाती है।

जब किसी संख्या का कोई गुणनखण्ड कोई रूढ़ संख्या होती है तो उसे रूढ़ गुणनखण्ड कहते हैं। इस प्रकार ६ के २ और ३ रूढ़ गुणनखण्ड हैं।

वे कुल संख्यायें जो कि गुणन पहाड़े में आती हैं यौगिक संख्यायें हैं। इस प्रकार गुणन पहाड़े की सहायता से तुम बड़ी सरलता से ऐसी संख्याओं के गुणनखण्ड निकाल सकते हो। लेकिन बहुत-सी ऐसी संख्यायें हैं जिनके गुणनखण्ड इतनी सरलता से नहीं निकल सकते।

नीचे कुछ नियम दिये जाते हैं जिनकी सहायता से तुम ऐसी संख्याओं के गुणनखण्ड मालूम कर सकते हो।

पूरे पूरे बँटने की पहिचान

(१) ऐसी संख्यायें जो २ से विभाज्य हैं :—

जिस संख्या को इकाई का अङ्क २ से पूरा विभाजित हो जाय वह संख्या २ से विभाज्य होती है। जैसे ११६ दो से विभाज्य है क्योंकि ६ (इकाई का अङ्क) २ से विभाज्य है।

कारण :—

११६ = ११० + ६ = (११ × १०) + ६

∵ १० विभाज्य है २ से

∴ ११ × १० ,, २ से

∵ ६ ,, २ से

∴ (११ × १०) + ६

अर्थात् ११६ ,, २ से।

(२) ऐसी संख्याय जो ४ से विभाज्य हैं :—

कोई संख्या ४ से पूरी पूरी उस समय विभाजित हो जाती है जब उसके अन्तिम दो अङ्कों से बनी संख्या ४ से विभाजित हो जाती है। उदाहरणतः ११६६ चार से विभाज्य है क्योंकि ९६ चार से विभाज्य है।

कारण —

$$११३६ = ११०० + ३६ = (११ \times १००) + ३६$$

१०० विभाज्य है ४ से

(११ × १००) „ ४ से

३६ „ ४ से

(११ × १००) + ३६

अर्थात् ११-६ „ ४ से।

(३) ऐसी संख्यायें जो से विभाज्य हैं —

कोई सख्या ८ स उस समय विभाज्य होती है जब उस सख्या क अन्तिम तीन अङ्कों से बनी हुई सख्या ८ से विभाज्य होती है। उदाहरणत, ९११२ आठ से विभाज्य है क्योंकि ११२ आठ से विभाज्य है।

कारण —

$$९११२ = ९००० + ११२$$

$$= (९ \times १०००) + ११२$$

१००० विभाज्य है ८ से

९ × १००० „ ८ से

११२ „ ८ से

(९ × १०००) + ११२

अर्थात् ९११२ „ ८ से।

इसी प्रकार यह सिद्ध किया जा सकता है कि कोई संख्या १६ से उस समय विभाज्य होगी जब उसके अन्तिम चार अङ्कों से बनी हुई संख्या १६ से विभाज्य होगी।

(४) ऐसी संख्यायें जो ५ से विभाज्य हैं:—

यदि किसी संख्या का इकाई का अङ्क शून्य या पाँच हो तो वह ५ से विभाज्य होती है। उदाहरणतः, १२५ पाँच से विभाज्य है क्योंकि उसकी इकाई का अङ्क ५ है।

कारण:—

१२५ = १२० + ५
= १२ × १० × ५

∵ १० विभाज्य है ५ से
∴ (१२ × १०) भी „ ५ से
∵ ५ „ ५ से
∴ (१२ × १०) + ५
अर्थात् १२५ भी „ ५ से।

पुनः १३० भी ५ से विभाज्य है क्योंकि उसकी इकाई का अङ्क शून्य है।

कारण:—

१३० = १३ × १०
१० विभाज्य है ५ से

∴ १३ × १०

अर्थात् १३० भी विभाज्य है ५ से।

(५) ऐसी संख्यायें जो १० से विभाज्य होती हैं:—

इसी प्रकार यह सिद्ध किया जा सकता है कि ऐसी संख्या जिसका अन्तिम अङ्क शून्य हो वह १० से और ऐसी संख्या जिसके अन्तिम दो अङ्क शून्य हों १०० से विभाज्य होती है। १००, १००००, आदि संख्याओं से किसी संख्या का विभाज्य होना भी हम इसी प्रकार मालूम कर सकते हैं।

(६) ऐसी संख्यायें जो २५ से विभाज्य हैं:—

चूँकि २५ एक सौ का गुणनखण्ड है और १२५ एक हजार का गुणनखण्ड है इसलिए यह सिद्ध किया जा सकता है कि ऐसी संख्या जिसके दो अन्तिम अङ्क शून्य हों या ऐसी संख्या बनाते हों जो २५ से विभाज्य है तो वह दी हुई संख्या २५ से विभाज्य होगी, और ऐसी संख्या जिसके अन्तिम तीन अङ्क शून्य हों अथवा जिसके अन्तिम तीन अङ्कों से ऐसी संख्या बनती हो जो १२५ से विभाज्य हो तो वह संख्या १२५ से विभाज्य होगी।

(७) ऐसी संख्यायें जो ३ या ९ से विभाज्य हैं :—

ऐसी संख्या जिसके अङ्कों का जोड़ ३ या ९ से पूरा पूरा भाग हो जाता है वह संख्या ३ अथवा ९ से विभाज्य होती है। उदाहरणतः, १२४२ संख्या ३ और ९ दोनों से विभाज्य है,

क्योंकि इसके अङ्कों का जोड़ जो (१+२+४+२) या ९ है ३ और ९ से विभाज्य है।

कारण:—

१२४२ = १००० + २०० + ४० + २

और १००० = ९९९ + १,

२०० = २ × १०० = २ (९९ + १) = २ × ९९ + २,

४० = ४ × १० = ४ (९ + १) = ४ × ९ + ४,

२ = २

∴ १२४२ = (९९९ + २ × ९९ + ४ × ९) + (१ + २ + ४ + २)

= (९९९ + २ × ९९ + ४ × ९) + ९

∵ ९, ९९ और ९९९ में से प्रत्येक ९ से विभाज्य है,

∴ (९९९ + २ × ९९ + ४ × ९) + ९ अर्थात् १२४२ भी ९ से विभाज्य है,

पुनः, चूँकि ९ तीन से विभाज्य है इसलिए ऐसी संख्या जो ९ से विभाज्य है ३ से भी विभाज्य होगी।

(८) ऐसी संख्यायें जो ६ से विभाज्य हैं —

इसी प्रकार यह सिद्ध किया जा सकता है कि ऐसी संख्या जो पृथक् पृथक् २ और ३ से विभाज्य होती है ६ से भी विभाज्य होगी।

(९) ऐसी संख्यायें जो ११ से विभाज्य हैं:—

यदि किसी संख्या के सम स्थानों के अङ्कों के जोड़ और विषम स्थानों के अङ्कों के जोड़ का अन्तर शून्य हो

अथवा ऐसी संख्या हो जो ११ से विभाज्य हो तो वह संख्या ११ से विभाज्य होती है।

उदाहरणतः, ७२५३४ ग्यारह से विभाज्य है क्योंकि (७ – २ + ५ – ३ + ४) = ११

कारणः—

७२५३४ = ७०००० + २००० + ५०० + ३० + ४

और ७०००० = ७ × १०००० = ७ (९९९९ + १) = (७ × ९९९९) + ७

२००० = २ × १००० = २ (१००१ – १) = (२ × १००१) – २

५०० = ५ × १०० = ५ (९९ + १) = (५ × ९९) + ५

३० = ३ × १० = ३ (११ – १) = (३ × ११) – ३

४ = ४

∵ वे संख्यायें जो कि उपरोक्त चार पंक्तियों में कोष्ठकों में हैं अर्थात् (७ × ९९९९), (२ × १००१), (५ × ९९) (३ × ११), ११ से विभाज्य है और (७ – २ + ५ – ३ + ४) अर्थात् ११ भी ११ से विभाज्य है, इसलिए इनका जोड़ अर्थात् ७२५३४ भी ११ से विभाज्य है।

(१०) ऐसी संख्यायें जो १२ से विभाज्य हैं: –

चूँकि १२ तीन और चार का गुणनफल है इसलिए ऐसी संख्या जो ३ और ४ दोनों से विभाज्य है १२ से भी विभाज्य होगी।

(११) ऐसी संख्याएं जो १५ से विभाज्य हैं:—

चूँकि १५ तीन और पाँच का गुणनफल है, इसलिए ऐसी संख्या जो ३ और ५ दोनों से विभाज्य है १५ से भी विभाज्य होगी।

अब हम ऊपर निकाले हुए फलों को संक्षेप में निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं:—

(१) कोई संख्या २ से उस समय विभाज्य होती है जब कि उसकी इकाई का अङ्क २ से विभाज्य होता है।

(२) कोई संख्या ४ से उस समय विभाज्य होती है, जब कि उसके अन्तिम दो अङ्कों से बनी हुई संख्या ४ से विभाज्य होती है।

(३) कोई संख्या ८ से उस समय विभाज्य होती है जब उसके अन्तिम तीन अङ्कों से बनी हुई संख्या ८ से विभाज्य होती है।

(४) कोई संख्या १६ से उस समय विभाज्य होती है जब उसके अन्तिम ४ अङ्कों से बनी हुई संख्या १६ से विभाज्य होती है।

(५) यदि किसी संख्या का अन्तिम अङ्क शून्य या ५ हो तो वह ५ से विभाज्य होती है।

(६) यदि किसी संख्या का अन्तिम अंक शून्य हो तो वह १० से विभाज्य होती है।

(७) यदि किसी संख्या के अन्तिम दो अंक शून्य हों अथवा ऐसी संख्या बनाते हों जो २५ से विभाज्य हो तो वह संख्या २५ से विभाज्य होती है।

(८) यदि किसी संख्या के अन्तिम अंक शून्य हों अथवा ऐसी संख्या बनाते हों जो १२५ से विभाज्य हो तो वह संख्या १२५ से विभाज्य होती है।

(९) यदि किसी संख्या के अंकों का जोड़ ३ अथवा ९ से विभाज्य हो तो वह संख्या ३ अथवा ९ से विभाज्य होती है।

(१०) यदि किसी संख्या के सम स्थानों के अंकों के जोड़ और विषम स्थानों के अंकों के जोड़ का अन्तर शून्य हो अथवा ऐसी संख्या हो जो ११ से विभाज्य है तो वह संख्या ११ से विभाज्य होती है।

नोट—कोई ऐसा निर्दिष्ट नियम नहीं है जिससे हमको यह ज्ञात हो जाय कि कोई संख्या ७ से विभाज्य है अथवा नहीं।

अब हमने ऊपर जो कुछ सीखा है उसकी सहायता से संख्याओं के गुणनखण्ड निकालेंगे।

उदाहरण १—गुणन पहाड़ों की सहायता से निम्नलिखित संख्याओं के गुणनखण्ड निकालो:—

(१) ४८ (२) ५४ (३) ७२।

(१) चूँकि ४८ = ४ × १२ = ३ × १६ = ६ × ८ = २ × २४

२, ३, ४, ६, ८, १२, १६, और २४, यह सब ४८ के गुणनखंड हैं।

(२) चूँकि ५४ ३ × १८ = ६ × ९ = २ × २७

∴ २, ३, ६, ९, १८, और २७, यह सब ५४ के गुणनखंड हैं।

(३) चूँकि ७२ = ८ × ९ = १२ × ६ = ४ × १८ = ३ × २४ = २ × ३६

∴ २, ३, ४, ६, ८, ९, १२, १८, २४ और ३६, यह सब ७२ के गुणनखंड हैं।

उदाहरण २—पूरे पूरे बँटने की पहिचान के नियमों की सहायता से निम्नलिखित संख्याओं के जितने अधिक गुणनखण्ड निकाल सकते हो निकालो :—

(१) ३४५ (२) ३२४ और (३) २३१।

(१) चूँकि ३४५ का अन्तिम अंक ५ है इसलिए वह ५ से विभाज्य है। इस प्रकार ५ उसका एक गुणनखण्ड है। चूँकि ३४५ के अंकों का जोड़ ३ से विभाज्य है इसलिए ३ भी उसका एक गुणनखण्ड है।

अब चूँकि ३४५ किसी और संख्या से (जिसकी पूरे पूरे बँटने की पहिचान ज्ञात है) विभाज्य नहीं है इसलिए ३४५ को दूसरे दो गुणनखण्डों के गुणनफल से भाग देने से इसका शेष गुणनखण्ड ज्ञात हो सकता है। इस प्रकार, तीसरा गुणनखण्ड २३ निकला। इस प्रकार ३४५ के गुणनखण्ड ३, ५, और २३ हुए।

(२) इसी प्रकार पूरे पूरे बँट जाने की पहिचान के नियम से यह ज्ञात होता है कि २, ३, ४, ९ और १२ से ३२४

विभाज्य है। इसलिए यह सिद्ध है कि २, ३, ४, ९, १२, यह सब ३२४ के गुणनखण्ड हैं।

(३) २३१ तीन और ग्यारह दोनों से विभाज्य है; इसलिए २३१ के ११ और ३ दो गुणनखण्ड हुए। २३१ को ११ और ३ के गुणनफल से भाग देने पर शेष गुणनखण्ड प्राप्त हो सकता है और यह ७ निकलता है। इस प्रकार २३१ के ३, ७ और ११ यह गुणनखण्ड हुए।

अभ्यास ७ (ज़बानी)

गुणन पहाड़ों की सहायता से निम्नलिखित संख्याओं के गुणनखण्ड निकालो:—

(१)	१६	(२)	२४
(३)	२८	(४)	४२
(५)	२७	(६)	३६
(७)	३९	(८)	४४
(९)	४५	(१०)	४९
(११)	५४	(१२)	६०
(१३)	६३	(१४)	७०
(१५)	७२	(१६)	८१
(१७)	९६	(१८)	१०४
(१९)	११२	(२०)	१२०
(२१)	१२१	(२२)	१२८

(२३) १३५ (२४) १४०

(२५) १४४

यह ज्ञात करो कि निम्नलिखित संख्यायें २, ३, ५ या ११ से विभाज्य हैं या नहीं:—

(२६) ४२		(२७) ७४		(२८) ९९	
(२९) १२३		(३०) २४६		(३१) ७२०	
(३२) ७३२		(३३) ७९२		(३४) १२३२	
(३५) १३२०					

पूरे पूरे बँट जाने की पहिचान के नियमों की सहायता से निम्नलिखित संख्याओं के अधिक से अधिक जितने गुणनखण्ड निकाल सकते हो निकालो:—

(३६) १३२ (३७) १०५ (३८) १८७ (३९) ११२

(४०) १६५ (४१) १५६ (४२) १२८ (४३) १२९

(४४) २०५ (४५) २२५ (४६) २०८ (४७) २१६

(४८) २४० (४९) ३७५ (५०) ४५०।

यह ज्ञात करना कि कोई दी हुई संख्या रूढ़ संख्या है या नहीं।

१६० के नीचेवाली रूढ़ संख्याओं को तुम गुणन पहाड़ो की सहायता से ज्ञात कर सकते हो।

१६० से बड़ी कोई संख्या रूढ़ है या नहीं हम इस प्रकार सरलता से ज्ञात कर सकते हैं। उस संख्या को २, ३, ५, ७, ११,

१३ इत्यादि रूढ़ संख्याओं से क्रम से भाग दो। यदि किसी दशा में कुछ शेष रहे तो वह संख्या रूढ़ है। यह रीति निम्नलिखित उदाहरण से स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण १—यह ज्ञात करना कि ६१३ रूढ़ संख्या है या नहीं।

चूँकि अन्तिम अंक ३ दो से विभाज्य नहीं है इसलिए ६१३ भी २ से विभाज्य नहीं है।

चूँकि अंकों का जोड़ (६ + १ + ३) यानी १० तीन से विभाज्य नहीं है, इसलिए ६१३ भी ३ से विभाज्य नहीं है।

चूँकि अन्तिम अंक न तो शून्य है और न ५ है इसलिए ६१३ पाँच से विभाज्य नही है।

चूँकि सम और विषम स्थानों के अंकों के जोड़ का अन्तर अर्थात (६ + ३ − १) न तो शून्य है और न ११ से विभाज्य है इसलिए ६१३ ग्यारह से भी विभाज्य नहीं है।

चूँकि ४, ६, ८, १०, १२, १४, १६, १८, २०, २२, २४ इन सबका एक गुणनखण्ड २ है और ६१३ दो से विभाज्य नहीं है, इसलिए वह ४, ६, ८, १०, १२, १४, १६, १८, २०, २२, २४ इनमें से किसी से भी विभाज्य नहीं हैं।

इसी प्रकार वह ९, १५ अथवा २१ (जो सब ३ से विभाज्य हैं) से भी विभाज्य नहा है।

अब हमको इस संख्या को अग्रलिखित रीति पर ७, १३, १७, १९, और २३ में से प्रत्येक रूढ़संख्या से भाग देना चाहिए।

७) ६१३ (८७, ४

१३) ६१३ (४७, २

१७) ६१३ (३६, १
५१
१०३
१०२
१

१९) ६१३ (३२, ५
५७
४३
३८
५

२३) ६१३ (२६, १५
४६
१५३
१३८
१५

तुम देखते हो कि जब ६१३ को ७, १३, १७, १९, २३ से भाग देते हैं तो प्रत्येक दशा में कुछ शेष रहता है।

चूँकि २५ × २५ = ६२५, जो कि ६१३ से अधिक है, इसलिए यह सिद्ध है कि यदि तुम ६१३ को २४ से बड़ी किसी संख्या से भाग दो तो लब्धि भाजक से कम होगा, और चूँकि २४ से छोटी कोई ऐसी संख्या अभी तक नहीं निकली जो ६१३ को पूरा पूरा विभाजित कर देती इसलिए यह बिलकुल स्पष्ट है कि ६१३ किसी ऐसी संख्या से विभाजित नहीं किया जा सकता जो २४ से बड़ी हो। इस प्रकार यह सिद्ध हुआ कि ६१३ रूढ़ संख्या है।

उदाहरण २—१२०१२ के रूढ़ गुणनखण्ड निकालो।

चूँकि यहाँ अन्तिम अंक सम है इसलिए दी हुई संख्या २ से विभाज्य है। इस प्रकार २ उसका एक गुणनखण्ड है। इसलिए हम १२०१२ को २ से भाग देंगे जिससे हमको दूसरा

गुणनखण्ड प्राप्त हो जाय। इस प्रकार यह मालूम हुआ कि इसका दूसरा गुणनखण्ड ६००६ है।

फिर ऊपर लिखे हुए कारण के अनुसार ६००६ का एक और गुणनखण्ड २ निकला, और दूसरा गुणनखण्ड ६००६ को २ मे भाग देने से ३००३ निकला।

चूँकि इस गुणनखण्ड के अर्कों का जोड़ (३ + ० + ० + ३) या ६ हुआ इसलिए ३००३ का एक गुणनखण्ड ३ हुआ और दूसरा ३००३ को तीन से भाग देने से १००१ निकला।

१००१ का अन्तिम अंक न तो शून्य और न ५ है इसलिए वह ५ से विभाज्य नहीं है अर्थात् ५ उसका गुणनखण्ड नहीं हो सकता।

चूँकि ५ से बड़ी रूढ़ संख्या ७ है और इस संख्या से विभाज्य होने की कोई पहिचान नहीं है इसलिए हम १००१ को ७ से भाग देते हैं और तब देखते हैं कि भजनफल १४३ आता है और कुछ शेष नहीं रहता है। इस प्रकार १००१ का एक गुणनखण्ड ७ है और दूसरा १४३ निकला।

चूँकि (३ − ४ + १) शून्य के बराबर है इसलिए १४३ ग्यारह म विभाज्य है, अर्थात् ११ उसका एक गुणनखण्ड है, जिससे १४३ को भाग देने पर दूसरा गुणनखण्ड १३ आया।

चूँकि अब अन्तिम गुणनखण्ड अर्थात् १३ स्वयं रूढ़ संख्या है इसलिए हमको अब आगे न बढ़ना चाहिए, क्योंकि अब हमको दी हुई संख्या के सब रूढ़ गुणनखण्ड प्राप्त हो चुके।

पीछे जो क्रिया हमने विस्तारपूर्वक बतलाई है वह साधारणतः संक्षेप में निम्नलिखित रीति पर दिखलाई जाती है:—

२	१२०१२
२	६००६
३	३००३
७	१००१
११	१४३
	१३

∴ १२०१२ = २ × २ × ३ × ७ × ११ × १३, अर्थात्

२, २, ३, ७, ११, और १३, यह सब १२०१२ के रूढ़ गुणनखण्ड हैं।

उपरोक्त उदाहरण से तुम समझ सकते हो कि जिस संख्या के गुणनखण्ड तुमको ज्ञात करने हैं उसको उसके एक रूढ़ गुणन खण्ड से भाग देना चाहिए और फिर जो फल आवे उसको दूसरे रूढ़ गुणनखण्ड से भाग देना चाहिए। यह रीति उस समय तक जारी रखनी चाहिए जब तक कि अन्तिम भागफल रूढ़ गुणनखण्ड न हो जाय।

अभ्यास ८ (ज़बानी)

इनके बीच की रूढ़ संख्यायें निकालो :—

(१) १ और १०   (३) २१ और ३०

(२) ११ और २०   (४) ३१ और ५०

(५) ५१ और ७० (८) १२१ और १३०
(६) ७१ और १०० (९) १३१ और १४०
(७) १०१ और १२० (१०) १४१ और १६०

(११) वे कौन-सी रूढ़ संख्यायें हैं जिनसे यदि ४१ को भाग दें तो प्रत्येक दशा में शेष २ हो ?

(१२) वे कौन-सी रूढ़ संख्यायें हैं जिनसे यदि ७९ को भाग दें तो प्रत्येक दशा में शेष १ रहे ?

(१३) वे कौन-सी रूढ़ संख्यायें हैं जिनसे यदि १०९ को भाग दें तो प्रत्येक दशा में ४ शेष रहे ?

(१४) ऐसी कितनी रूढ़ संख्यायें हैं जो २० से बड़ी और ५० से छोटी हैं ?

(१५) कोई ऐसी दो यौगिक संख्यायें बताओ जिनमें कोई समान गुणनखण्ड न हों।

(१६) १ और २० के बीचवाली सब यौगिक संख्याओं को बताओ जिनमें कोई समान गुणनखण्ड न हों।

निम्नलिखित संख्याओं के रूढ़ गुणनखण्ड निकालो :—

(१७)	१४	(१८)	२२	(१९)	२४	(२०)	२८
(२१)	३५	(२२)	३९	(२३)	४५	(२४)	४६
(२५)	४९	(२६)	५२	(२७)	५७	(२८)	६९
(२९)	७५	(३०)	७७	(३१)	८५	(३२)	८८
(३३)	९५	(३४)	९८	(३५)	१००	(३६)	११२
(३७)	११४	(३८)	११९	(३९)	१२४	(४०)	१६०

अभ्यास ९

निम्नलिखित संख्याओं के रूढ़ गुणनखण्ड निकालो :—

(१)	८४	(२)	९२	(३)	१२६	(४)	१३०
(५)	१४३	(६)	१६८	(७)	२९४	(८)	३७८
(९)	४६२	(१०)	४९५	(११)	५२५	(१२)	६००
(१३)	७३५	(१४)	८२५	(१५)	९२४	(१६)	९७५
(१७)	१०१२	(१८)	१०९२	(१९)	११९६	(२०)	१३८६
(२१)	१४२८	(२२)	१७४८	(२३)	१८४८	(२४	२७१७

यह ज्ञात करो कि निम्नलिखित संख्याओं में से कौन कौन-सी रूढ़ सख्यायें हैं और जो यौगिक संख्याये हों उनके रूढ़ गुणनखण्ड निकालो :—

(२५)	२९	(२६)	३५	(२७)	४३	(२८)	५७
(२९)	६१	(३०)	७३	(३१)	८९	(३२)	९३
(३३)	११७	(३४)	१४७	(३५)	१६७	(३६)	१८३
(३७)	२२७	(३८)	२३७	(३९)	२८१	(४०)	३०७
(४१)	३२३	(४२)	५०७				

(४३) ऐसी कौन-सी रूढ़ संख्याये हैं जिनसे यदि १६७ में भाग दिया जाय तो प्रत्येक दशा में २ शेष रहे ?

(४४) ऐसी कौन-सी रूढ़ संख्यायें हैं जिनसे यदि ३८५ में भाग दिया जाय तो शेष कुछ भी न रहे ?

(४५) ऐसी कौन-सी रूढ़ संख्यायें हैं जो ४४२ में ३ जोड़ देने पर उसे पूरा पूरा विभाजित कर देंगी ?

(४६) उन रूढ़ संख्याओं को ज्ञात करो जा ७७० में १ जोड़ने पर उसे पूरा पूरा विभाजित कर देंगी।

(४७) ऐसी कुल रूढ़ संख्यायें बताओ जिनसे यदि ११५५ को विभाजित करें तो शेष कुछ भी न रहे।

(४८) १०१ और १५० के बीच की कुल रूढ़ संख्याओं को ज्ञात करो।

(४९) १६२, १९६, २८५, ४१३, ५२० के रूढ़ गुणनखण्डों को निकालो।

(५०) यह ज्ञात करो कि निम्नलिखित संख्यायें २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, ११ में से प्रत्येक से विभाज्य हैं या नहीं :—
(१) १८० (२) १९८० (३) ११८८०।

अध्याय ३

लघुतम समापवर्त्य

तुम वह जानते हो कि २ और ५ दोनों १० के गुणनखण्ड हैं और १० दो और पाँच का गुणनफल है। यह गुणनफल, जो कि एक संख्या २ (अथवा ५) को दूसरी संख्या से गुणा करने से प्राप्त होता है २ (अथवा ५) का अपवर्त्य कहलाता है।

इसी प्रकार १५, ३ अथवा ५ का एक अपवर्त्य है; २०, २, ४, ५, और १० का अपवर्त्य है, इत्यादि।

ऊपर जो तीन संख्याये ली गई हैं, अर्थात् १०, १५ और २०, इनमें से प्रत्येक ५ का एक अपवर्त्य है और ५ को २, ३, और ४ से क्रम से गुणा करने पर प्राप्त होता है। इस प्रकार अपवर्त्य की निम्नलिखित परिभाषा भी हो सकती है :—

किसी दी हुई संख्या का अपवर्त्य वह संख्या है जो कि दी हुई संख्या को किसी दूसरी संख्या से गुणा करने पर प्राप्त होती है।

फिर चूँकि १०, २ और ५ से विभाज्य है, १५, ३ और ५ से, और २०, ४ और ५ से विभाज्य है, इसलिए किसी दी हुई संख्या के अपवर्त्य की परिभाषा अग्रलिखित भी हो सकती है :—

किसी दी हुई संख्या का अपवर्त्य वह संख्या है जो कि दी हुई संख्या से पूरी पूरी विभाज्य होती है।

तुमने अभी यह देखा है कि किसी संख्या का अपवर्त्य उस संख्या को किसी भी दूसरी संख्या से गुणा करने पर प्राप्त होता है। इसलिए गुणन पहाड़ों से तुम यह बतला सकते हो कि २ के अपवर्त्य छोटे से छोटे अपवर्त्य से आरम्भ करने पर २, ४, ६, ८, १०, १२, १४, १६, १८, २०, २२, २४, २६, २८, ३०, ३२, इत्यादि होंगे, तीन के अपवर्त्य ३, ६, ९, १२, १५, १८, २१, २४, २७, ३०, ३३ इत्यादि, और ५ के अपवर्त्य ५, १०, १५, २०, २५, ३०, ३५ इत्यादि, होंगे।

उपरोक्त उदाहरणों से तुम देखोगे कि किसी दी हुई संख्या के अपवर्त्यों की गणना नहीं हो सकती और इसलिए **तुम किसी संख्या का बड़े से बड़ा अपवर्त्य नहीं ज्ञात कर सकते।**

फिर उपरोक्त उदाहरणों से तुम देखोगे कि (१) ६, १२, १८, २४, ३० ये संख्यायें २ और ३ दोनों के अपवर्त्य हैं (२) १०, २० और ३० ये संख्यायें २ और ५ दोनों के अपवर्त्य हैं (३) १५ और ३० ये संख्यायें ३ और ५ दोनों के अपवर्त्य हैं और (४) ३० तो २, ३ और ५ तीनों का अपवर्त्य है।

ऐसे अपवर्त्य समापवर्त्य कहलाते हैं और उनकी परिभाषा अग्रलिखित हो सकती है :—

दो अथवा दो से अधिक संख्याओं का समापवर्त्य वह संख्या है जो कि दी हुई संख्याओं में से प्रत्येक संख्या का अपवर्त्य है।

चूँकि किसी दी हुई संख्या का अपवर्त्य उस संख्या से पूरा पूरा विभाज्य होता है इसलिए समापवर्त्य की यह भी परिभाषा हो सकती है :—

दो या दो से अधिक संख्याओं का समापवर्त्य वह संख्या है जो कि दी हुई सख्याओं में से प्रत्येक से पूरी पूरी विभाज्य होती है।

समापवर्त्यों की जो तालिका ऊपर दी गई है उससे तुम देखोगे कि २ और ३ के कुल समापवर्त्यों, अर्थात् ६, १२, १८ इत्यादि में से ६ सबसे छोटा है। इसलिए २ और ३ का सबसे छोटा **या लघुतम समापवर्त्य** ६ है। इसी प्रकार, चूँकि २ और ५ के कुल समापवर्त्यों में १० सबसे छोटा है इसलिए २ और ५ का लघुतम समापवर्त्य १० है और इसी प्रकार २, ३ और ५ के समापवर्त्यों में ३० सबसे छोटा होने के कारण २, ३, ५ का लघुतम समापवर्त्य ३० है।

इस प्रकार दो या दो से अधिक संख्याओं का सबसे छोटा या लघुतम समापवर्त्य वह छोटी से छोटी संख्या होती है जो कि दी हुई संख्यायों में से प्रत्येक से पूरी पूरी विभाजित हो जाती है और कोई शेष नहीं रहता।

(**नोट**—लघुतम समापवर्त्य को संक्षिप्त रूप में केवल ल० स० व० लिखते हैं ।)

अब हम एक उदाहरण लेकर यह समझावेंगे कि लघुतम समापवर्त्य का ठीक ठीक क्या आशय है ।

उदाहरण १—वह छोटी से छोटी रक़म बताओ जो कि ३ रु०, ४ रु० या ५ रु० के हिसाब से फ़क़ीरों में बाँट दी जा सकती हो और कुछ शेष न रहे ।

(१) पहले यह मान लेा कि फ़क़ीरों में से प्रत्येक को ३ रु० दिया जाता है ।

चूँकि फ़क़ीरों की संख्या नहीं दी हुई है इसलिए हम चाहें जितने फ़क़ीर मान सकते हैं जैसे १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, १०, इत्यादि ।

इसलिए जो रक़म इनमे बँट जायगी वह क्रम से ३ रु०, ६ रु०, ९ रु०, १२ रु०, १५ रु०, १८ रु०, २१ रु०, २४ रु०, २७ रु०, ३० रु०, इत्यादि होगी । यहाँ पर ३ रु०, ६ रु०, ९ रु०, १२ रु०, १५ रु०, १८ रु०, २१ रु०, २४ रु०, २७ रु०, ३० रु०, इत्यादि में से प्रत्येक ३ रु० का अपवर्त्य है, अर्थात् इनमें से प्रत्येक ३ रु० से पूरा पूरा विभाज्य है ।

(२) अब मान लेा कि प्रत्येक फ़क़ीर को ४ रु० दिये जाते हैं । इस दशा में क्रम से ४ रु०, ८ रु०, १२ रु०, १६ रु०, २० रु०, २४ रु०, २८ रु०, ३२ रु०, ३६ रु०, ४० रु० को आवश्यकता होगी ।

यहाँ ४ रु०, ८ रु०, १२ रु०, १६ रु०, २० रु०, २४ रु०, २८ रु०, ३२ रु०, ३६ रु०, ४० रु० में से प्रत्येक ४ रु० का अपवर्त्य है, अर्थात् इनमें से प्रत्येक ४ रु० से पूरा पूरा विभाज्य है।

(३) अन्त में यह मान लो कि प्रत्येक फ़क़ीर को ६ रु० दिये जाते हैं। तब, १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, १० इत्यादि फ़क़ीरों के लिए जिस रक़म की आवश्यकता होगी वह क्रम से ६ रु०, १२ रु०, १८ रु०, २४ रु०, ३० रु०, ३६ रु०, ४२ रु०, ४८ रु०, ५४ रु०, ६० रु० होगी।

यहाँ ६ रु०, १२ रु०, १८ रु०, २४ रु०, ३० रु०, ३६ रु०, ४२ रु०, ४८ रु०, ५४ रु०, ६० रु०, इत्यादि में से प्रत्येक ६ रु० का अपवर्त्य है, अर्थात् इनमें से प्रत्येक ६ रु० से पूरा पूरा विभाज्य है।

अब हम ३ रु०, ४ रु०, और ६ रु० के कुल अपवर्त्यों को निम्नलिखित रूप में लिखते हैं :—

३ रु० के अपवर्त्य	४ रु० के अपवर्त्य	६ रु० के अपवर्त्य
३ रु०	४ रु०	
६ "		६ रु०
९ "	८ "	
१२ "	१२ "	१२ "
१५ "	१६ "	

१८ रु०		१८ रु०
२१ "	२० रु०	
२४ "	२४ "	२४ "
२७ "	२८ "	
३० "		३० "
३३ "	३२ "	
३६ "	३६ "	३६ "

चूँकि अभीष्ट रकम प्रत्येक फ़कीर को ३ रु०, ४ रु० और ६ रु० के हिसाब से दी जा सकती है इसलिए प्रत्येक दशा मे जो रक़म आवश्यक होगी वह ३ रु०, ४ रु० और ६ रु० मे से प्रत्येक से पूरी पूरी विभाजित होगी।

अपवर्त्यों की जो सूची ऊपर दी गई है उससे अब यह स्पष्ट है कि ३ रु०, ४ रु० और ६ रु० के समापवर्त्य १२ रु०, २४ रु० और ३६ रु० है।

इस प्रकार तुम देखते हो कि जो रकम दो जानी चाहिए वह १८ रु०, २४ रु० या ३६ रु० या कोई दूसरी ऐसो रक़म होनी चाहिए जो १२ रु० का अपवर्त्य हो।

चूँकि तुमको केवल उस छोटी से छोटी रक़म की आवश्यकता है जो ३ रु०, ४ रु० और ६ का अपवर्त्य हो इसलिए स्पष्ट है कि अभीष्ट रकम १२ रु० हुई। यह रक़म ३ रु०, ४ रु० और ६ रु० का लघुतम समापवर्त्य है।

उपरोक्त उदाहरणों से यह स्पष्ट है कि कुछ दी हुई संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य निकालने के लिए तुमको निम्नलिखित रीति पर चलना चाहिए।

(१) दी हुई सख्याओं में से प्रत्येक संख्या के अपवर्त्यों की एक सूची बनाओ।

(२) इस सूची में जितने समापवर्त्य हैं उनकी एक सूची बनाओ।

(३) इस दूसरी सूची में से सबसे छोटा समापवर्त्य चुन लो।

चूँकि संख्याओं के ल० स० अ० निकालने की यह रीति बहुत लम्बी है इसलिए इस रीति पर थोडा अभ्यास कर लेने के बाद तुमको एक छोटी रीति बतलाई जायगी।

अभ्यास १० (ज़बानी)

निम्नलिखित संख्याओं के पाँच अपवर्त्य बताओ :—

(१) २ (२) ५ (३) ७ (४) ८ (५) १०
(६) १२ (७) ९ (८) ६ (९) १५ (१०) १६

निम्नलिखित संख्याओं के कोई पाँच समापवर्त्य बताओ :—

(११) २ और ३ (१२) ४ और ८ (१३) ३ और ५
(१४) ३ और ७ (१५) ६ और ९ (१६) ५ और १०
(१७) २, ३ और ४ (१८) २, ४ और ५ (१९) ३, ४ और ६
(२०) ४, ६ और १२

निम्नलिखित संख्याओं के लघुतम समापवर्त्य बतलाओ :—
(२१) २ और ३ (२२) ६ और ९ (२३) २, ३ और ४
(२४) ३, ४ और ६ (२५) ४, ८ और १२

अभ्यास ११

निम्नलिखित संख्याओं के १ और १०० के बीचवाले अपवर्त्य बतलाओ :—
(१) १८ (२) २० (३) २४ (४) २७ (५) ३०

निम्नलिखित संख्याओं के १ और ३०० के बीचवाले अपवर्त्य बताओः—

(६) ३६ (७) ४५ (८) ६० (९) ७२ (१०) ८८

ऊपर के उदाहरण १ में दिखलाई हुई सूची के रूप में निम्नलिखित संख्याओं के कम से कम तीन लघुतम समापवर्त्यों की सूची बनाओः—

(११) १५ और २०	(१२) १८ और २४
(१३) २० और ३०	(१४) ३० और ४५
(१५) ७, १४ और २१	(१६) १२, १५ और २०
(१७) १८, २४ और ३६	(१८) ११, २२, ३३
(१९) १२, १४, ३६	(२०) ३०, ४५, ९०

• ऐसी संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य निकालना जिनमें कोई गुणनखण्ड न हो।

दो या दो से अधिक संख्याओं के लघुतम समापवर्त्य के विषय में तुमको जो कुछ समझाया गया है उससे तुम यह स्पष्टतया समझ जाओगे कि ऐसी दो या दो से अधिक संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य जिनमें कोई समान गुणनखण्ड न हों इन संख्याओं का गुणनफल होगा। इस प्रकार, ६ और ५ का ल० स० अ० ६ × ५ अर्थात् ३० होगा, क्योंकि ६ और ५ में कोई समान गुणनखण्ड न होने के कारण, ३० से कोई छोटी संख्या जैसे २० (अथवा १८) जो ५ (अथवा ६) से विभाज्य है दूसरी संख्या से विभाज्य न होगी।

ऐसी संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य निकालना जिनमें समान गुणनखण्ड हों।

यदि वे दी हुई संख्यायें जिनका लघुतम समापवर्त्य निकालना है ऐसी हैं कि उनमें एक या एक से अधिक समान गुणनखण्ड हों जैसे उपरोक्त उदाहरण १ में ३, ४ और ६ हैं, तो तुम देख चुके हो कि उनका गुणनफल अर्थात् ७२ उनका ल० स० अ० नहीं है। यद्यपि यह गुणनफल उन संख्याओं का समापवर्त्य है परन्तु वह उनका लघुतम समापवर्त्य नहीं है, क्योंकि १२, २४, ३६, ४८ और ६० ये सब संख्यायें ३, ४ और ६ के अपवर्त्य है और सब ७२ से कम हैं। चूँकि १२ को छोड़ कर और सब समापवर्त्य १२ के अपवर्त्य हैं इसलिए यह स्पष्ट है कि इन समापवर्त्यों में से प्रत्येक, १२ और एक या अधिक रूढ़ संख्याओं का गुणनफल है। अतः, यदि

हम किसी प्रकार इन निरर्थक रूढ़ गुणनखण्डों को दी हुई संख्याओं के गुणनफल में से निकाल दें तो इस अध्याय के आरम्भ में दिये हुए उदाहरण १ में जो लम्बी रीति समझाई गई है उसके बिना किये हुए ही हम सरलता से उनका ल० स० अ० ज्ञात कर सकते हैं।

निम्नलिखित उदाहरणों से तुम यह समझ जाओगे कि इस रीति से संख्याओं का ल० स० अ० कैसे निकाला जाता है।

उदाहरण २—कपड़े की वह छोटी से छोटी लम्बाई मालूम करो जिसमें से १५ इंच के अथवा १८ इंच के टुकड़े पूरे पूरे काटे जा सकें।

यह स्पष्ट है कि कपड़े की लम्बाई १५ इंच और १८ इंच दोनों से पूरी पूरी विभाज्य होनी चाहिए और कपड़े का यह टुकड़ा कम से कम लम्बाई का होना चाहिए, अर्थात् हमको १५ इंच और १८ इंच का ल० स० अ० निकालना चाहिए।

ऊपर हम यह देख चुके हैं कि ऐसी संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य जिनमें समान गुणनखण्ड होते हैं इन संख्याओं के गुणनफल में से निरर्थक रूढ़ गुणनखण्डों को निकालने से हम ज्ञात कर सकते हैं। पहिले हमको १५ और १८ के रूढ़ गुणनखण्ड निकालने चाहिएँ और फिर यह ज्ञात करना चाहिए कि इनमें कौन कौन निरर्थक हैं और ल० स० अ० में न आने चाहिएँ।

१५ और १८ के गुणनखण्ड करने पर मालूम हुआ कि:—

१५ = ५ × ३

और १८ = २ × ३ × ३

चूँकि अभीष्ट ल० स० अ० ऐसा होना चाहिए जो १५ से विभाज्य हो इसलिए १५ उसका एक गुणनखण्ड होना चाहिए, अर्थात् ३ और ५ उसके गुणनखण्डों में होने चाहिएँ। फिर चूँकि ल० स० अ० ऐसा होना चाहिए कि वह १८ से भी विभाज्य हो इसलिए १८ उसका गुणनखण्ड होना चाहिए, अर्थात् उसके गुणनखण्डों में ३, ३ और २ होने चाहिएँ। परन्तु ५ के अतिरिक्त हमको अभीष्ट लघुतम समापवर्त्य के गुणनखण्डों में एक ३ पहिले प्राप्त हो चुका है, इसलिए हमको १८ के गुणनखण्डों में से अब केवल एक २ और एक ३ ही लेना चाहिए। इस प्रकार १५ × १८ अर्थात् ३ × ५ × ३ × ३ × २ में से केवल एक निरर्थक रूढ़ गुणनखण्ड ३ निकाल देना है, और इसलिए :—

ल० स० अ० = २ × ३ × ३ × ५ = ९०

इसलिए अभीष्ट लम्बाई = ९० इंच

= २ गज १ फुट ६ इंच।

उदाहरण ३—वह छोटी से छोटी रक़म बताओ जिसमें १ रुपया ४ आ०, १ रुपया ८ आ० और २ रुपया पूरी पूरी बार शामिल हैं।

इस उदाहरण में तुमको ऐसी रक़म ज्ञात करनी है जो कि १ रु० ४ आ०, १ रु० ८ आ० और २ रु० से पूरी पूरी

विभाज्य हो और फिर भी सबसे छोटी रक़म हो। अर्थात् तुमको १ रु० ४ आ०, १ रु० ८ आ० और २ रु० का ल० स० अ० निकालना है।

चूँकि १ रु० ४ आ०, १ रु० ८ आ० और २ रु० बराबर हैं २० आ०, २४ आ० और ३२ आ० के, इसलिए तुमको पहिले २०, २४ और ३२ के रूढ गुणनखण्ड निकालने चाहिएँ और तब पिछले उदाहरण की तरह चलना चाहिए। २०, २४, और ३२ को गुणनखण्डों में तोड़ने पर मालूम हुआ कि —

२० = २ × २ × ५

२४ = २ × २ × २ × ३

३२ = २ × २ × २ × २ × २

चूँकि अभीष्ट ल० स० अ० मे एक गुणनखण्ड २० होना चाहिए इसलिए उसके गुणनखण्डों मे दो २ और एक ५ होने चाहिएँ। और चूँकि उसमे एक गुणनखण्ड २४ भी होना चाहिए इसलिए उनके गुणनखण्डों मे एक ३ और एक २ अतिरिक्त होने चाहिएँ, क्योकि २४ के बाक़ी गुणनखण्ड अर्थात् दो २ अभीष्ट ल० स० अ० मे पहिले ही स मौजूद हैं। इस प्रकार अभीष्ट ल० स० अ० के कुल रूढ गुणनखण्डो मे से हमे अभी तक तीन २, एक ३ और एक ५ प्राप्त हो चुके हैं। फिर चूँकि अभीष्ट ल० स० अ० के गुणनखण्डों मे ३२ भी होना चाहिए इसलिए उसमे दो २ और अतिरिक्त होने चाहिएँ क्योकि ३२ के बाक़ी गुणनखण्ड, अर्थात् तीन २ तो पहिले ही से मौजूद हैं।

इस प्रकार, अभीष्ट ल० स० अ० में पाँच २, एक ३ और एक ५ ये गुणनखण्ड होने चाहिए।

∴ अभीष्ट ल० स० अ० = २ × २ × २ × २ × २ × ३ × ५

= ४८०

इसलिए अभीष्ट रकम = ४८० आने

= ३० रुपये

इन उदाहरणों से अब हम दो या अधिक संख्याओं का ल० स० अ० ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित नियम निकालते हैं :—

(१) दी हुई संख्याओं के सब रूढ़ गुणनखण्ड निकालो।

(२) दी हुई संख्याओं के भिन्न भिन्न रूढ़ गुणनखण्डों को चुन लो। इन संख्याओं के ल० स० अ० में इन भिन्न भिन्न गुणनखण्डों में से प्रत्येक कम से कम एक बार अवश्य आवेगा।

(३) यदि इन भिन्न भिन्न रूढ़ गुणनखण्डों मे से कोई गुणनखण्ड दी हुई संख्याओं में से किसी भी संख्या मे एक से अधिक बार आता है तो अभीष्ट ल० स० अ० में इन गुणनखण्डों में से प्रत्येक उतनी ही बार आवेगा जितनी बार कि वह उस संख्या में आता है जिसमें वह सबसे अधिक बार आता है।

(४) उपरोक्त नियम (३) के अनुसार जितनी बार किसी भी रूढ गुणनखण्ड की आवश्यकता हो उतनी लेकर उनके और उन रूढ़ गुणनखण्डों का लगातार

गुणनफल, जो कि दी हुई संख्याओं में से किसी भी संख्या में एक बार से अधिक नहीं आते इन संख्याओं का अभीष्ट ल० स० अ० होगा।

अब हम नीचे के उदाहरण में यह देखेंगे कि हम इन नियमों को किस प्रकार काम में ला सकते हैं।

उदाहरण ४—६, १५, १८, १४ और ४२ का लघुतम समापवर्त्य निकालो।

पहिली क्रिया

६ = २ × ३

१५ = ३ × ५

१८ = २ × ३ × ३

२४ = २ × २ × २ × ३

४२ = २ × ३ × ७

दूसरी क्रिया

ऊपर हम जो कुछ सीख चुके हैं उससे हम देखते हैं कि अभीष्ट ल० स० अ० में दी हुई संख्याओं के सब भिन्न भिन्न रूढ़ गुणनखण्ड अर्थात् २, ३, ५ और ७ होने चाहिएँ।

तीसरी क्रिया

चूँकि केवल दो ही गुणनखण्ड ऐसे हैं जो दी हुई संख्याओं में एक से अधिक बार आते हैं, इसलिए इनमें से प्रत्येक को

उतनी बार लेना चाहिए जितनी बार वह उस संख्या में आता है, जिसमें कि वह अधिक से अधिक बार आता है। इस प्रकार, चूँकि २४ में २ तीन बार और १८ में ३ दो बार आता है इसलिए अभीष्ट ल० स० अ० के गुणनखण्डों में दो ३ बार और तीन २ बार आवेंगे।

चौथी क्रिया

इन गुणनखण्डों का अर्थात् तीन २ और दो ३ का और दी हुई संख्याओं के उन बाक़ी रूढ़ गुणनखण्डों का जो कि किसी भी संख्या में केवल एक बार आये हैं लगातार गुणनफल अभीष्ट ल० स० अ० होगा।

इसलिए अभीष्ट ल० स० अ० = २ × २ × २ × ३ × ३ × ५ × ७
= २५२०

अभ्यास १२ (ज़बानी)

(१) वह कौन कौन-सी संख्यायें हैं जिनसे १२ पूरा पूरा विभाजित हो सकता है ?

(२) १ और २० के बीचवाली कौन कौन-सी ऐसी संख्याये हैं जो कि (१) २ के (२) ३ के अपवर्त्य हैं ? (३) इनमें से कौन कौन-सी संख्यायें उनके समापवर्त्य हैं ? (४) इनका लघुतम समापवर्त्य क्या है ?

(३) २, ३ और ४ का लघुतम समापवर्त्य कौन-सी संख्या है ?

(४) वह कौन-सी छोटी से छोटी संख्या है जो कि ३, ४ और ५ से पूरी पूरी विभाजित हो सकती है ?

(५) वह छोटी से छोटी संख्या कौन-सी है जो कि ४, ५ और ६ से पूरी विभाजित हो सकती है ?

(६) वह छोटी से छोटी सख्या कौन-सी है जिसमें कि ३, ४ और ५ से भाग देने पर प्रत्येक दशा में २ शेष रहे ?

(७) वह छोटी से छोटी कौन-सी लम्बाई है जो कि ६ फ़ीट लम्बे डण्डे और ८ फ़ीट लम्बे लट्ठे दोनों से अलग अलग पूरी पूरी नापी जा सकती है ?

(८) वह छोटी से छोटी कौन-सी संख्या है जिसमें यदि १ जोड़ दें तो २, ३, ४ इन संख्याओं में से प्रत्येक का अपवर्त्य हो जाय ?

(९) वह छोटी से छोटी कौन-सी रक़म है जिसमें से २ रुपये, ३ रुपये और ६ रुपये की पूरी पूरी ढेरियाँ बन सकती हैं ?

(१०) कम से कम कितनी दूध की आवश्यकता होगी जिससे कि ६ छटाँक की, ८ छटाँक की या १२ छटाँक दूध की पूरी पूरी बोतलें भरी जा सकती हैं ? हर पैमाने की कितनी बोतलें इस दूध से भरी जा सकती हैं ?

निम्नलिखित का ल० स० अ० निकालो :—

(११) ६ और ९।

(१२) ८ और १२।

(१३) ८ रुपये और १० रुपये।

(१४) ६ सेर और १० सेर।
(१५) ७ छटाँक और २१ छटाँक।
(१६) १२ गज़ और १६ गज़।
(१७) ५ इंच और १५ इंच।
(१८) ४ रुपये और ७ रुपये।
(१९) ५ गज़ और ९ गज़।
(२०) १२ फ़ीट और १८ फ़ीट।
(२१) ३ रु०, ४ रु० और ५ रु०।
(२२) २ सेर, ६ सेर और ७ सेर।
(२३) ६, ८ और १२।
(२४) ८, १० और १६।
(२५) १२, १५ और २०।

अभ्यास १३

गुणनखण्ड की रीति से निम्नलिखित संख्याओं का ल० स० प्र० निकालो :—

(१) १६ और २४।
(२) २८ और ३५।
(३) ३६ और ५४।
(४) ६ रु० ८ रु० और १८ रु०।
(५) ९ रु० २१ रु० और २७ रु०।

(६) ४ मन, १२ मन और २१ मन।
(७) ३५ मन, ४५ मन और ६३ मन।
(८) १० रु०, १२ रु० और ३६ रु०।
(९) १५ रु०, २५ रु० और ३५ रु०।
(१०) १८ , ३६ और ७२।
(११) ७५ , ९० और १२०।
(१२) ७७ फ़ीट, ८८ फ़ीट और ११० फ़ीट।
(१३) ६० फ़ीट, १०८ फ़ीट और १३५ फ़ीट।
(१४) ८० गज़, ९० गज़ और १२० गज़।
(१५) २५ सेर, ६३ सेर और ७५ सेर।
(१६) ४ आने, ६ आने, ८ आने और १५ आने।
(१७) १५ रु०, २५ रु०, ३५ रु० और ४२ रु०।
(१८) १८, ३६, ४२ और ५६।
(१९) ४९, ६३, ७२ और ८१।
(२०) १२, १८, २४, ३६ और ४२।
(२१) आमों की वह छोटी से छोटी सख्या कौन-सी है जिसमें से १६, १८, २४ और ३२ आमों की ढेरियाँ बन सकती हैं ?
(२२) वह छोटी से छोटी सख्या ज्ञात करो जो कि १८, २४ और ३६ से पूरी पूरी विभाज्य हो।
(२३) कपडे की वह कौन-सी छोटो से छोटी लम्बाई है जिसमे से ३ गज़, ४ गज़, ६ गज़ और ८ गज़वाले टुकड़े काटे जा सकते हैं ?

(२४) वह छोटी से छोटी कौन सी रक़म है जो कि १२ रु० ८ आने, ९ रु० ४ आने और ६ रु० ४ आने प्रत्येक मनुष्य के हिसाब से पूरी पूरी बाँटी जा सकती है ?

(२५) शकर की वह छोटी से छोटी कौन-सी मात्रा है जो कि ¾ सेर, १ सेर, २¼ सेर और ५ सेर वज़नवाले बाटों से तोली जा सकती है ?

(२६) रस्सी की वह छोटी से छोटी कौन-सी लम्बाई है जिसमें से कि २ गज़, ३ गज़, ६ गज़, ८ गज़ या ९ गज़ के टुकड़े काटे जा सकते हों और कुछ भी रस्सी न बचे ? प्रत्येक लम्बाई के कितने टुकड़े काटे जा सकते हैं ?

(२७) वह छोटी से छोटी कौन-सी सख्या है जिसको यदि ३५, ४५ और ५५ में से प्रत्येक से भाग दे तो प्रत्येक दशा में ५ शेष रहे ?

(२८) वह छोटी से छोटी कौन-सी संख्या है जिसमें यदि ८ जोड़ें तो ४२, ५६ और ९८ से बिभाज्य हो जाय और कुछ शेष न रहे ?

(२९) वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात करो जिसे यदि ८०५० में जोड़ें तो जोड़ ३६, ६०, ७२ और ८१ से पूरा पूरा विभाजित हो जाय।

(३०) वह छोटी से छोटी संख्या बताओ जिसमें से यदि २८ घटा दें तो शेष ४४, ५२, ११० और १५६ से पूरा पूरा विभाजित हो जाय।

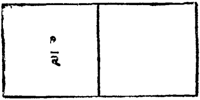
अध्याय ४

साधारण भिन्न

१—प्रारम्भिक ज्ञान

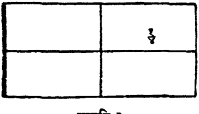
अ—आधे, चौथाई, आठवें और सोलहवें भाग

कागज़ की पट्टियों की सहायता से प्रयोग—कागज़ की एक लम्बी चौकोर पट्टी लो और उसको बीच से मोड़ कर तह करो, और खोलो तो तुम देखोगे कि पट्टी दो बराबर भागों मे बँट



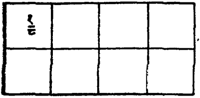
आकृति १

गई है, जैसा कि आकृति १ मे दिखाया गया है। इन भागों में से प्रत्येक भाग को, जैसा कि तुम्हे कक्षा १ में बतलाया जा चुका है, पट्टी का आधा या १/२ भाग कहते हैं।



आकृति २

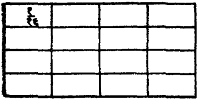
एक बार तह की हुई पट्टी को बीच से मोड़ कर फिर तह करो और खोलो, तो तुम देखोगे कि उस पट्टी के चार बराबर भाग हो गये हैं, जैसा कि आकृति २ में दिखाया गया है। इनमें से प्रत्येक भाग को, जैसा कि तुम्हें कक्षा १ में बतलाया जा चुका है, कुल पट्टी का चौथाई भाग या ¼ कहते हैं।



आकृति ३

इस तह की हुई पट्टी को बीच में मोड़ कर फिर तह करो और खोलो, तो तुम देखोगे कि पूरी पट्टी के आठ बराबर भाग हो गये हैं, जिनमें से हर एक भाग को हम कुल पट्टी का आठवाँ या ⅛ भाग कहते हैं, जैसा कि आकृति ३ में दिखाया गया है।

अन्त में इस तह की हुई पट्टी को एक बार फिर तह करके



आकृति ४

खोलो तो तुमको इसके १६ बराबर भाग दिखाई देंगे, जिनमें से प्रत्येक भाग को हम पूरी पट्टी का सोलहवाँ या $\frac{1}{16}$ भाग कहते हैं, जैसा कि आकृति ४ में दिखाया गया है।

प्रयोग १—काग़ज़ की चार बराबर पट्टियाँ लो। इनमें से एक पट्टी को तह करके दो बराबर भाग और दूसरी के चार, तीसरी के आठ और चौथी के सोलह बराबर भाग कर लो, जैसा कि ऊपर की आकृतियों में दिखलाया गया है। इन पट्टियों में से $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{२}{४}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{२}{८}$, $\frac{३}{८}$, $\frac{४}{८}$, $\frac{५}{८}$, $\frac{६}{८}$, $\frac{७}{८}$, $\frac{१}{१६}$, $\frac{३}{१६}$, $\frac{५}{१६}$, $\frac{७}{१६}$, $\frac{९}{१६}$, $\frac{११}{१६}$, $\frac{१३}{१६}$, और $\frac{१५}{१६}$ भाग काट कर अलग करो।

प्रयोग २—ऊपर के भागों की सहायता से दिखाओ कि $\frac{१}{२} = \frac{२}{४} = \frac{४}{८} = \frac{८}{१६}$, $\frac{१}{४} = \frac{२}{८} = \frac{४}{१६}$, $\frac{१}{८} = \frac{२}{१६}$, और पूरी पट्टी = २ आधे = ४ चौथाई = ८ आठवें = १६ सोलहवें, अर्थात् $१ = \frac{२}{२} = \frac{४}{४} = \frac{८}{८} = \frac{१६}{१६}$।

नोट—अगर हम २ पूरी पट्टियों और एक पूरी पट्टी की ३ चौथाइयाँ लें तो कुल पट्टियों को हम "$२\frac{३}{४}$ पट्टियाँ" लिख कर प्रकट करते हैं, जैसा कि तुम्हें कक्षा १ में बताया जा चुका है।

अभ्यास १४ (प्रयोगात्मक)

काग़ज़ की चार एक-साँ बराबर पट्टियाँ लो और उनको पूर्ववत् तह कर लो और फिर काटकर नीचे के प्रश्नों का उत्तर निकालो :—

(१) $\frac{१}{८} + \frac{१}{८} = ?$, $\frac{१}{८} + \frac{१}{४} = ?$, $\frac{३}{८} + \frac{५}{८} = ?$, $\frac{१}{८} + \frac{१}{२} = ?$, $\frac{१}{१६} + \frac{३}{१६} = ?$, $\frac{३}{१६} + \frac{५}{१६} = ?$, $\frac{१}{४} + \frac{३}{१६} = ?$, $\frac{१}{४} + \frac{३}{१६} = ?$, $\frac{३}{४} + \frac{१}{१६} = ?$, $\frac{३}{८} + \frac{५}{१६} = ?$

(२) $\frac{३}{४}-\frac{१}{४}=?$, $\frac{३}{४}-\frac{१}{२}=?$, $\frac{३}{४}-\frac{१}{८}=?$, $\frac{३}{८}-\frac{१}{८}=?$,
$\frac{३}{४}-\frac{३}{८}=?$, $\frac{१}{४}-\frac{१}{१६}=?$, $\frac{१}{२}-\frac{३}{८}=?$, $\frac{१}{२}-\frac{५}{१६}=?$,
$१\frac{३}{८}-\frac{१}{८}=?$, $१\frac{१}{२}-१\frac{३}{४}=?$

(३) पूरी पट्टी में से क्या बच रहेगा यदि $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{१}{८}$, $\frac{३}{८}$, $\frac{५}{८}$, $\frac{७}{८}$, $\frac{१}{१६}$, $\frac{३}{१६}$, $\frac{५}{१६}$, $\frac{७}{१६}$, $\frac{९}{१६}$, $\frac{११}{१६}$ निकाल लिया जाय ?

(४) $२-१\frac{१}{२}=?$, $२-१\frac{३}{४}=?$, $२-१\frac{१}{८}=?$, $३-१\frac{३}{८}=?$,
$३-२\frac{५}{८}=?$, $३-२\frac{५}{१६}=?$, $३-२\frac{९}{१६}=?$, $२\frac{१}{२}-२\frac{१}{४}=?$,
$२\frac{३}{४}-१\frac{७}{८}=?$, $२\frac{५}{१६}-१\frac{९}{१६}=?$

(५) १ पट्टी मे, $१\frac{१}{२}$ में, $१\frac{३}{४}$ में, $२\frac{१}{४}$ में, और ३ पट्टियो में कितनी चौथाइयाँ हैं ?

(६) कितने आठवे भाग हैं :—१ पट्टी में, $१\frac{१}{८}$ में, $१\frac{३}{८}$ में, $१\frac{१}{४}$ मे, $१\frac{१}{२}$ में, $१\frac{७}{८}$ मे, २ में, $२\frac{७}{८}$ में और ३ में ?

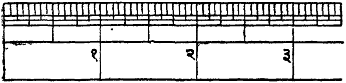
(७) कितने सोलहवे भाग हैं :—१ पट्टी में, २ में, ३ में, $१\frac{१}{१६}$ में. $१\frac{१}{८}$ में, $१\frac{१}{४}$ में, $१\frac{१}{२}$ में, $१\frac{३}{४}$ में, $२\frac{३}{१६}$ में, $२\frac{५}{१६}$ में, $२\frac{३}{८}$ मे, $२\frac{७}{१६}$ में, $२\frac{९}{१६}$ में, $३\frac{१}{८}$ में, $३\frac{३}{४}$ में, $३\frac{७}{८}$ में और $३\frac{१५}{१६}$ में ?*

पटरी की सहायता से प्रयोग—अपनी पटरी को देखो। तुम जानते हो कि यह एक फ़ुट लम्बी है और देखते हो कि यह

---

* अध्यापक जी को चाहिए कि इस प्रकार के बहुत-से उदाहरण लेकर लड़कों से अच्छी तरह अभ्यास करावें।

बारह बराबर भागों में बँटी है, जिसमें से प्रत्येक भाग को १ इंच कहते हैं।



ध्यान से देखो इस पटरी में एक इंच के और भी बहुत-से छोटे छोटे, परन्तु बराबर भाग किये गये हैं, जैसा कि तुम इस चित्र में देखते हो। प्रत्येक इंच के भीतर सबसे बड़ी और खड़ी हुई रेखा एक इंच को दो बराबर भागों में बाँटती है। इसलिए इनमें से प्रत्येक भाग को आधा इंच कहते हैं और $\frac{1}{2}$ इंच लिखकर प्रकट करते हैं।

प्रयोग १—एक रेखा $\frac{1}{2}$ इंच लम्बी खींचो और इसके नीचे १ इंच और $\frac{1}{2}$ इंच लम्बी और एक रेखा खींचो। इस लम्बाई को १$\frac{1}{2}$ इंच लिखते हैं।

प्रयोग २—$\frac{1}{2}$ इंच, १$\frac{1}{2}$ इंच, २$\frac{1}{2}$ इच, ३$\frac{1}{2}$ इंच लम्बी रेखायें खींचो।

अब तुम अपनी पटरी को फिर देखो तो मालूम होगा कि इसमें आधे इंच को भी दो बराबर भागों में बाँटा है और इस प्रकार एक इंच के चार बराबर भाग हो गये हैं। इसलिए इनमें से प्रत्येक भाग को हम इंच का चौथाई भाग कहते हैं और $\frac{1}{4}$ इंच लिखकर प्रकट करते हैं। तुमको कक्षा १ में यह बताया जा

चुका है कि ऐसे दो भाग या दो चौथाई को $\frac{२}{४}$ और तीन भाग या तीन चौथाई को $\frac{३}{४}$ लिख कर प्रकट करते हैं।

प्रयोग ३—१$\frac{१}{४}$ इंच, २$\frac{२}{४}$ इच और ३$\frac{३}{४}$ इच लम्बी रेखायें खींचो।

प्रयोग ४—एक रेखा १ इच और २ चौथाई इच लम्बी खींचो।

पटरी के देखने से यह भी ज्ञात होता है कि आधे इच में २ चौथाई इच होते हैं, इसलिए $\frac{२}{४}$ इच = $\frac{१}{२}$ इच।

अब पटरी मे देखो कि एक चौथाई इच के भी दो बराबर भाग किये गये हैं। इस प्रकार पूरे १ इच के ८ बराबर भाग हो गये हैं, जिनमे से प्रत्येक को $\frac{१}{८}$ इच लिखते हैं। ऐसे दो भागों के $\frac{२}{८}$, तीन आठवे भागों को $\frac{३}{८}$ और चार भागों को $\frac{४}{८}$ इत्यादि लिखते हैं।

प्रयोग ५—१$\frac{२}{८}$ इच और १$\frac{१}{४}$ इच लम्बी रेखाय खींचो और उनकी तुलना करो। इन दोनों रेखाओं की लम्बाइयों के विषय मे तुमको कौन-सी बात ज्ञात हुई ?

यह दोनों बराबर हैं।

इससे जान पडता है कि $\frac{२}{८}$ इच = $\frac{१}{४}$ इच।

प्रयोग ६—इसी प्रकार १$\frac{४}{८}$ इच और १$\frac{६}{८}$ इच लम्बी रेखाये खींच कर १$\frac{१}{२}$ इच और १$\frac{३}{४}$ इच लम्बी रेखाओ से क्रमश तुलना करो और इस तरह बताओ कि ४ आठवे हिस्सों मे इच के आधे और चौथाई भाग कितने हैं, तथा ६ आठवे हिस्सों मे कितने चौथाई भाग हैं।

अब एक बार पटरी को फिर देखो तो मालूम होगा कि इसमें प्रत्येक आठवाँ भाग भी दो बराबर भागों में बँटा हुआ है जिनमें से प्रत्येक भाग १ इंच का सोलहवाँ भाग कहलाता है और $\frac{१}{१६}$ इच लिखा जाता है।

ऐसे दो भाग $\frac{२}{१६}$ इंच, तीन भाग $\frac{३}{१६}$ इंच और चार भाग $\frac{४}{१६}$ इंच इत्यादि, लिखे जाते हैं।

प्रयोग ७—$१\frac{२}{१६}$ इंच, $१\frac{४}{१६}$ इंच, $१\frac{६}{१६}$ इच, $१\frac{८}{१६}$ इच, $१\frac{१०}{१६}$ इंच, $१\frac{१२}{१६}$ इंच और $१\frac{१४}{१६}$ इंच लम्बी रेखाओं की क्रमशः $१\frac{१}{८}$ इंच, $१\frac{१}{४}$ इंच, $१\frac{३}{८}$ इंच, $१\frac{१}{२}$ इच, $१\frac{५}{८}$ इंच, $१\frac{३}{४}$ इंच और $१\frac{७}{८}$ इंच लम्बी रेखाओं से तुलना करो और देखो कि इंच के ८ सोलहवें में कितने आधे इच, कितने चौथाई इंच और कितने आठवें इंच हैं? इससे तुम समझ गये होगे कि $\frac{१}{२}$ इंच $=\frac{२}{४}$ इंच $=\frac{४}{८}$ इंच $=\frac{८}{१६}$ इंच, और १ इंच $=\frac{२}{२}=$ इच $=\frac{४}{४}$ इंच $=\frac{८}{८}$ इंच $=\frac{१६}{१६}$ इंच।

अभ्यास—१५ (प्रयोगात्मक)

१—अपनी पटरी की सहायता से नीचे के प्रश्नों का मान बताओ :—

$\frac{३}{८}$ इंच + $\frac{५}{८}$ इंच, $\frac{१}{४}$ इंच + $\frac{१}{८}$ इंच, $\frac{१}{२}$ इंच + $\frac{१}{८}$ इंच, $\frac{१}{१६}$ इंच + $\frac{३}{१६}$ इंच, $\frac{१}{२}$ इंच + $\frac{२}{१६}$ इंच, $\frac{१}{४}$ इच + $\frac{५}{१६}$ इच, $\frac{५}{८}$ इंच + $\frac{३}{१६}$ इंच, $\frac{७}{१६}$ इंच + $\frac{१०}{१६}$ इंच, $\frac{५}{८}$ इंच + $\frac{५}{८}$ इंच और $\frac{७}{८}$ इंच + $\frac{५}{८}$ इंच।

२—अपनी पटरी में दिखाओ कि $\frac{३}{४}$ इंच में से $\frac{१}{४}$ इंच निकाल दिया जाय तो क्या बचेगा ?

स्पष्ट है कि $\frac{२}{४}$ इंच या $\frac{१}{२}$ इच बचेगा। इसको हम $\frac{३}{४}$ इच $-\frac{१}{४}$ इंच $=\frac{२}{४}$ इंच $=\frac{१}{२}$ इंच लिखते हैं।

इसी प्रकार $\frac{१}{२}$ इंच $-\frac{१}{४}$ इंच $=\frac{२}{४}$ इंच $-\frac{१}{४}$ इच $=\frac{१}{४}$ इंच और $\frac{३}{८}$ इंच $-\frac{१}{४}$ इच $=\frac{३}{८}$ इच $-\frac{२}{८}$ इंच $=\frac{१}{८}$ इंच।

३—जोड़ के प्रयोगों को भाँति पटरी की सहायता से नीचे के प्रश्नों को लगाओ :—

$\frac{३}{८}$ इच $-\frac{१}{८}$ इंच, $\frac{३}{४}$ इंच $-\frac{३}{८}$ इंच, $\frac{१}{२}$ इंच $-\frac{३}{८}$ इंच, $\frac{१}{४}$ इंच $-\frac{१}{१६}$ इंच, $\frac{३}{४}$ इंच $-\frac{५}{८}$ इंच, $\frac{५}{८}$ इंच $-\frac{७}{१६}$ इंच, $\frac{१}{२}$ इंच $-\frac{५}{१६}$ इंच, $१\frac{१}{२}$ इंच $-\frac{३}{४}$ इंच, $१\frac{१}{८}$ इंच $-\frac{१}{४}$ इच और $१\frac{७}{१६}$ इंच $-\frac{३}{८}$ इंच।

४—अपनी पटरी की सहायता से बताओ कि १ इंच में से $\frac{१}{४}$ इंच, $\frac{३}{४}$ इंच, $\frac{५}{८}$ इंच, $\frac{७}{८}$ इच, $\frac{३}{१६}$ इंच, $\frac{७}{१६}$ इच, $\frac{११}{१६}$ इच और $\frac{१५}{१६}$ इच निकाल दें तो कितना बच रहेगा।

५—अपनी पटरी की सहायता से नीचे के प्रश्नों का मान बताओ :—

२ इच $-१\frac{१}{२}$ इच, २ इच $-१\frac{१}{४}$ इच, ३ इच $-१\frac{३}{८}$ इच, ३ इंच $-१\frac{३}{१६}$ इंच, $१\frac{१}{२}$ इंच $-१\frac{१}{४}$ इच, $१\frac{७}{८}$ इंच $-१\frac{३}{४}$ इंच, $२\frac{७}{१६}$ इच $-१\frac{३}{८}$ इचं और $३\frac{५}{८}$ इच $-१\frac{३}{१६}$ इच।

६—अपनी पटरी की सहायता से बताओ कि १ इंच, २ इंच, $२\frac{१}{२}$ इंच, ३ इंच, $३\frac{१}{२}$ इच, ४ इच, $४\frac{१}{२}$ इंच और ५ इच में कितने आधे इंच हैं।

७—ऊपर की भाँति बताओ कि १ इंच, २ इंच, ३ इंच; १$\frac{१}{२}$ इंच, १$\frac{१}{४}$ इंच और २$\frac{३}{४}$ इंच में कितने चौथाई इंच हैं।

८—इसी तरह बताओ कि २ इंच, ५ इंच, १$\frac{१}{८}$ इंच, १$\frac{१}{४}$ इंच, १$\frac{३}{८}$ इंच, १$\frac{१}{२}$ इंच, १$\frac{७}{८}$ इंच, और २$\frac{३}{४}$ इंच में कितने आठवे इंच हैं। और यह भी बताओ कि १$\frac{३}{८}$ इंच, १$\frac{७}{१६}$ इंच, २$\frac{१}{४}$ इंच और १$\frac{१}{२}$ इंच मे कितने सोलहवे इंच हैं।

जबानी काम—कागज़ की पट्टियों की और पटरी की सहायता से आधे, चौथाई, आठवे और सोलहवे भागों के कुछ ज्ञान हो जाने पर अब तुमको कागज की पट्टी और पटरी के बदले वस्तुओं के और ऐसी राशियों के आधे, चौथाई, आठवे आदि भागों पर कुछ जबानी प्रश्न हल करने चाहिए जिनके आधे, चौथाई, आठवे और सोलहवे भाग आसानी से किये जा सकते हैं, जैसे आने, रुपये, पाव, सेर, आदि।

चूँकि ४ पैसे = १ आना
और १६ आने = १ रुपया

इसलिए तुम आसानी से समझ सकते हो कि १ पैसा = $\frac{१}{४}$ आना और १ आना = $\frac{१}{१६}$ रुपया।

चूँकि ४ छटाँक = १ पौवा
और ४ पौवे या १६ छ० = १ सेर

इसलिए १ छटाँक = $\frac{१}{४}$ पौवा या $\frac{१}{१६}$ सेर, और १ पौवा = $\frac{१}{४}$ सेर।

अभ्यास—१६ (ज़बानी)

कितने के बराबर हैं :—

(१) २४ गेंदों का १/४, १८ गेंदों का १/३, ३२ क़लमों का १/८ और ६४ पुस्तकों का १/१६ ?

(२) ४४ लड्डुओं का ३/४, १६ पैसों का ३/८ और ३२ पेन्सिलों का ३/१६ ?

(३) १२ गज़ का १/४, ८ गज़ का ३/८, १६ गज़ का ५/८, ३२ फ़ुट का ९/१६ ?

(४) एक लड़के के पास १६ पैसे थे। उनमें से इनका १/८ उसने एक भिखारी को दिया, और ३ पैसे दूसरे को दिये। तो उसके पास कितने पैसे बच रहे ?

(५) एक सन्दूक़ के फलों का १/८ भाग सड़ गया। यदि ये सड़े हुए फल १२ हों तो कुल कितने फल थे ?

(६) यदि मेरे पास २ रुपये हों तो मैं कितने भिखारियों को ३/८ रुपया प्रतिभिखारी दे सकता हूँ ?

(७) मेरे पास ८ रुपये ४ आने थे। इसका १/४ मैंने बाज़ार मे ख़र्च किया तो मैंने कितना रुपया ख़र्च किया ?

(८) ४० पैसों के ५/८ में से २४ पैसों के ३/८ को घटाओ।

(९) मेरे धन का १/१६ पाँच रुपये के बराबर है, तो उस धन को बताओ।

(१०) एक कक्षा में २४ लड़के हैं। यदि इनका $\frac{१}{८}$ देर से आया हो तो कितने लड़के ठीक समय पर आये ?

(११) गोपाल के पास ७२ खिलौने हैं। उसने इनका $\frac{३}{८}$ अपनी छोटी बहिन को दे दिया, तो उसके पास कितने बच गये ?

(१२) मोहन के पास ३२ पुस्तकें हैं जिनमें से इनका $\frac{५}{१६}$ खो गईं तो उसके पास अब कितनी पुस्तकें बचीं ?

(१३) मैंने ३ पुस्तकें $२\frac{१}{२}$ आने, $३\frac{१}{२}$ आने और $४\frac{१}{२}$ आने में मोल लीं तो मेरा कुल कितना व्यय हुआ ?

(१४) एक पुस्तक के मैंने $४\frac{१}{२}$ आने दिये और एक स्लेट के $३\frac{३}{४}$ आने और एक क़लम के $२\frac{१}{२}$ आने। तो कुल कितना दिया ?

(१५) एक रुपये में से क्या बच रहेगा जब कि मैं $८\frac{३}{८}$ आने खर्च कर दूँ ?

(१६) मैंने एक दूकानदार से $१३\frac{१}{२}$ आने की चीनी, $७\frac{१}{४}$ आने का घी और $२\frac{३}{४}$ आने का नमक लिया तो २ रुपये देने पर वह मुझको कितना लौटायेगा ?

(१७) $७\frac{३}{८}$ आने सेर के भाव से ४ सेर चीनी के दाम बताओ।

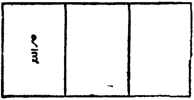
(१८) यदि तुम $\frac{१}{१६}$ रुपये को ३ भिखारियों में बराबर बराबर बाँटो तो प्रत्येक को कितने आने मिलेंगे ?

(१९) एक रुपये का आधा क्या होगा ? और उसका आधा ? और उसका आधा ? और उसका आधा ?

(२०) एक सेर का आधा क्या होगा ? और उसका आधा ? और उसका आधा ? और उसका आधा ?

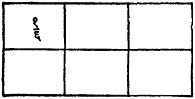
ब—तिहाई, छठवें और बारहवें भाग

कागज़ की पट्टियों की सहायता से प्रयोग—कागज़ की एक लम्बी चौकोर पट्टी को तीन बराबर भागों मे तह करो और खोल कर रक्खो, जैसा कि आकृति १ में दिखाया गया है। इनमे से प्रत्येक भाग कुल पट्टी का तिहाई भाग कहलाता है और १/३ भाग लिख कर प्रकट किया जाता है।



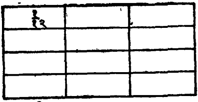
आकृति १

इस तह की हुई पट्टी को फिर लम्बाई की तरफ से मोड कर तह करो, जैसा कि आकृति २ मे दिखाया गया है। खोल कर फिर रक्खो तो पट्टी के ६ बराबर भाग तुमको देख पड़ेगे, जिनमे से प्रत्येक भाग, कुल पट्टी का छठा भाग कहलाता है और १/६ भाग लिख कर प्रकट किया जाता है।



आकृति २

अब इस दो बार तह की हुई पट्टी को फिर लम्बाई की तरफ़ से तह करो और खोलो तो तुमको पट्टी के १२ बराबर भाग देख पड़ेंगे जिनमें से प्रत्येक भाग कुल पट्टी का बारहवाँ भाग कहलाता है और १/१२ भाग लिख कर प्रकट किया जाता है, जैसा कि आकृति ३ मे दिखाया गया है।



आकृति ३

प्रयोग १—एक ही आकार की तीन बराबर काग़ज़ की पट्टियाँ लो जिनमें से एक को ३, दूसरी को ६ और तीसरी को १२ बराबर भागों में तह करो, जैसा कि हमने ऊपर बताया है। इनको खोल कर रक्खो और इनमें से नीचे लिखे भागों को कतरनी से काट कर अलग कर लो।

कुल का—१/३, २/३, १/६, २/६, ३/६, ४/६, ५/६, १/१२, २/१२, ३/१२, ४/१२, ५/१२, ६/१२, ७/१२, ८/१२, ९/१२, १०/१२, ११/१२।

प्रयोग २—इन भागों से जो तुमने कतर कर अलग कर लिये हैं यह भी दिखाओ कि :—१/३ = २/६ = ४/१२, ३/३ = ४/६ = ८/१२, १/६ = २/१२, २/६ = ४/१२, २/६ = ६/१२, ४/६ = ८/१२, ५/६ = १०/१२।

और यह भी दिखाओ कि पूरी पट्टी ३ तिहाई या ६ छठवें या १२ बारहवें भागों के बराबर है, अर्थात १ = ३/३ = ६/६ = १२/१२।

अभ्यास—१७ (प्रयोगात्मक)

कागज़ की कई बराबर और एक समान पट्टियाँ लो, उनको तह करो और हिस्सों को कतर करके नीचे के प्रश्नों* का उत्तर लिखो :—

(१) $\frac{१}{३}+\frac{१}{३}=?, \frac{२}{३}+\frac{१}{३}=?, \frac{१}{६}+\frac{५}{६}=?, \frac{२}{६}+\frac{२}{६}=?, \frac{१}{३}+\frac{५}{६}=?,$
$\frac{१}{२}+\frac{१}{३}=?, \frac{२}{१२}+\frac{३}{१२}=?, \frac{५}{१२}+\frac{४}{१२}=?, \frac{१}{१२}+\frac{१}{६}=?$
और $\frac{५}{६}+\frac{५}{१२}=?$

(२) $१-\frac{१}{३}=?, १-\frac{२}{३}=?, १-\frac{१}{६}=?, १-\frac{५}{६}=?, \frac{३}{६}-\frac{१}{६}=?,$
$\frac{५}{६}-\frac{१}{६}=?, \frac{१}{३}-\frac{१}{६}=?, \frac{५}{६}-\frac{२}{३}=?, १-\frac{१}{१२}=?, १-\frac{५}{१२}$
$=?, १-\frac{७}{१२}=?, १-\frac{११}{१२}=?, \frac{५}{१२}-\frac{१}{१२}=?, \frac{७}{१२}-\frac{५}{१२}$
$=?, \frac{११}{१२}-\frac{७}{१२}=?, \frac{१}{३}-\frac{१}{१२}=?, \frac{१}{६}-\frac{१}{१२}=?, \frac{५}{१२}-\frac{१}{३}$
$=?, \frac{७}{१२}-\frac{१}{६}=?, \frac{११}{१२}-\frac{५}{६}=?$ ।

(३) $\frac{१}{३}\times २=?, \frac{२}{३}\times ३=?, \frac{२}{३}\times ३=?, \frac{१}{६}\times २=?, \frac{५}{६}\times ३=?,$
$\frac{१}{१२}\times २=?, \frac{१}{१२}\times ४=?, \frac{५}{१२}\times २=?, \frac{५}{१२}\times ३=?,$
$\frac{५}{१२}\times ४=?$ ।

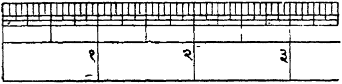
(४) $\frac{२}{६}-२=?, \frac{३}{६}\div ३=?, \frac{५}{६}\div ५=?, \frac{२}{३}-३=?,$
$\frac{१}{३}\div ३=?, \frac{१}{१२}\div ३=?, \frac{८}{१२}\div ४=?, \frac{४}{६}\div ३=?, \frac{४}{१२}-२$
$=?, \frac{६}{१२}\div ६=?$

---

* अध्यापक जी को चाहिए कि और बहुत-से इसी प्रकार के प्रश्न बनावें और भिन्न की क्रिया का अच्छी तरह अभ्यास करावें ।

पटरी की सहायता से प्रयोग—अब तुम अपनी पटरी का दूसरा किनारा देखो तो तुमको मालूम होगा कि इसमें एक इंच को तीन बराबर भागों में बाँटा है। इसलिए इसका प्रत्येक भाग एक इंच का तिहाई हुआ। इसको $\frac{१}{३}$ लिखते हैं। ऐसे दो भाग इच के दो तिहाई भाग कहलाते हैं और $\frac{२}{३}$ इंच लिख कर प्रकट किये जाते हैं।

प्रयोग १—$\frac{१}{३}$ इंच लम्बी एक रेखा खींचो और इसके नीचे एक और रेखा १ इंच और एक तिहाई इंच लम्बी खींचो। इस लम्बाई को $१\frac{१}{३}$ इंच लिखते हैं।



अब अपनी पटरी को फिर देखो। इसमें इच का प्रत्येक तिहाई भाग दो बराबर भागों में बाँटा गया है। इस तरह इंच के ६ बराबर भाग हुए और इनमें से प्रत्येक भाग को इंच का छठवाँ भाग कहते हैं और $\frac{२}{६}$ इंच लिखते हैं। ऐसे दो भाग दो छठवें भाग कहलाते हैं, और $\frac{२}{६}$ इच लिखे जाते हैं, ३ भाग $\frac{३}{६}$ इंच, इत्यादि।

प्रयोग २—एक रेखा $१\frac{२}{६}$ इंच लम्बी खींचो और उसके नीचे एक और रेखा $१\frac{१}{३}$ इंच खींचो। इन दोनों की लम्बाइयों की

तुलना करो और बताओ कि एक इंच के कितने तिहाई भाग $\frac{२}{६}$ इंच में पाये जाते हैं।

तुम स्वयं पटरी में भी देख सकते हो कि एक इंच के दो छठवें भाग एक तिहाई के बराबर होते हैं, अर्थात् $\frac{२}{६}$ इंच = $\frac{१}{३}$ इंच।

अब और ध्यान से देखो तो तुमको जान पड़ेगा कि इंच का छठवाँ भाग भी तुम्हारी पटरी मे दो बराबर भागों में बँटा हुआ है। इस प्रकार इच के १२ बराबर भाग हो गये जिनमें से प्रत्येक इंच का बारहवाँ भाग है। इसको $\frac{१}{१२}$ इच लिखते हैं। ऐसे दो भागों को $\frac{२}{१२}$ इच और तीन को $\frac{३}{१२}$ इंच, इत्यादि लिखते हैं।

प्रयोग ३—अपनी पटरी की सहायता से १$\frac{२}{१२}$ इंच, १$\frac{३}{१२}$ इंच, १$\frac{४}{१२}$ इंच, १$\frac{६}{१२}$ इंच, १$\frac{८}{१२}$ इंच, १$\frac{९}{१२}$ इच, और १$\frac{१०}{१२}$ इंच, लम्बाइयों की १$\frac{१}{६}$ इंच, १$\frac{१}{४}$ इंच, १$\frac{१}{३}$ इंच, १$\frac{१}{२}$ इंच, १$\frac{२}{३}$ इंच, १$\frac{३}{४}$ इंच और १$\frac{५}{६}$ इंच से क्रमशः तुलना करो और नीचे के प्रश्नों का उत्तर निकालो :—

$\frac{२}{१२}$ इच = $\frac{१}{६}$ इंच, $\frac{३}{१२}$ इच = $\frac{१}{४}$ इंच, $\frac{४}{१२}$ इंच = $\frac{१}{३}$ इंच, $\frac{६}{१२}$ इंच = $\frac{१}{२}$ इच, $\frac{८}{१२}$ इंच = $\frac{२}{३}$ इंच, $\frac{९}{१२}$ इंच = $\frac{३}{४}$ इच और $\frac{१०}{१२}$ इच = $\frac{५}{६}$ इंच।

तुम यह पहले पढ़ चुके हो कि $\frac{१}{३}$ इंच = $\frac{२}{६}$ इंच = $\frac{४}{१२}$ इच। अब तुम अपनी पटरी में पूरे एक इंच को देखो तो तुमको ज्ञात होगा कि एक पूरा इंच = ३ तिहाई या ६ छठवे, या १२ बारहवें अर्थात्—

१ इंच = $\frac{३}{३}$ इंच = $\frac{६}{६}$ इंच = $\frac{१२}{१२}$ इच।

अभ्यास–१८ (प्रयोगात्मक)

(१) अपनी पटरी की सहायता से नीचे के प्रश्नों का उत्तर निकालो :—

$\frac{२}{३}$ इंच + $\frac{२}{३}$ इंच = ?, $\frac{२}{३}$ इंच − $\frac{१}{३}$ इंच = ?, १ इंच − $\frac{२}{३}$ इंच = ?, $\frac{१}{६}$ इच + $\frac{१}{३}$ इंच = ?, $\frac{१}{६}$ इंच + $\frac{१}{२}$ इंच = ?, $\frac{५}{६}$ इंच − $\frac{१}{२}$ इच = ?, $\frac{५}{६}$ इंच − $\frac{२}{३}$ इंच = ?, $\frac{२}{३}$ इच − $\frac{१}{२}$ इंच = ?, १ इंच − $\frac{५}{६}$ इच = ?, $\frac{१}{१२}$ इंच + $\frac{५}{१२}$ इंच = ?, $\frac{११}{१२}$ इंच + $\frac{१}{२}$ इच = ?, $\frac{१}{१२}$ इच + $\frac{२}{३}$ इंच = ?, $\frac{१}{१२}$ इंच + $\frac{३}{४}$ इंच = ?, $\frac{१}{१२}$ इंच + $\frac{५}{६}$ इंच = ?, $\frac{१}{६}$ इंच + $\frac{१}{४}$ इंच = ?, $\frac{७}{१२}$ इच + $\frac{१}{३}$ इंच = ?, १ इंच − $\frac{१}{१२}$ इंच = ?, १ इच − $\frac{५}{१२}$ इंच = ?, $\frac{७}{१२}$ इंच − $\frac{५}{१२}$ इंच = ?, $\frac{११}{१२}$ इंच − $\frac{७}{१२}$ इंच = ? ।

(२) ऊपर की भाँति अपनी पटरी से नीचे के प्रश्नों का उत्तर निकालो :—

२ इंच − १ इच = ?, २ इच − १$\frac{१}{६}$ इच = ?, २ इच − १$\frac{७}{१२}$ इच = ?, ३ इच − १$\frac{५}{१२}$ इच = ?, २$\frac{२}{३}$ इंच − $\frac{१}{३}$ इच = ?, २$\frac{२}{३}$ इच − १$\frac{१}{६}$ इच = ? ।

(३) इसी प्रकार अपनी पटरी से नीचे के प्रश्न निकालो :—

$\frac{१}{३}$ इंच × २ = ?, $\frac{२}{६}$ इंच × २ = ?, $\frac{५}{६}$ इच × २ = ?

$\frac{१}{३}$ इंच × ३ = ? $\frac{२}{३}$ इंच × ३ = ?, $\frac{५}{६}$ इंच × ३ = ?

$\frac{१}{१२}$ इंच × ३ = ?, $\frac{७}{१२}$ इंच × २ = ?, $\frac{५}{१२}$ इंच × ४ = ? ।

(४) $\frac{२}{३}$ इच को २ बराबर भागों में बाँटो ।

तुम अपनी पटरी से देखकर यह प्रश्न निकाल सकते हो। चूँकि $\frac{२}{३}$ इंच में २ तिहाई इंच हैं इसलिए २ से भाग देने पर $\frac{१}{३}$ इंच उत्तर आया, इस प्रकार $\frac{२}{३}$ इंच ÷ २ = $\frac{१}{३}$ इंच।
इसी तरह $\frac{३}{६}$ इंच ÷ ३ = $\frac{१}{६}$ इंच।
और $\frac{६}{१२}$ इंच ÷ २ = $\frac{३}{१२}$ इंच, इत्यादि।

(५) इसी तरह अपनी पटरी की सहायता से नीचे के प्रश्नों का उत्तर निकालो :—

$\frac{२}{६}$ इंच ÷ २ = ?, $\frac{५}{६}$ इंच ÷ ५ = ?, $\frac{४}{६}$ इंच ÷ २ = ?, $\frac{३}{१२}$ इंच ÷ ३ = ?, $\frac{४}{१२}$ इंच ÷ ४ = ?, $\frac{६}{१२}$ इंच ÷ ३ = ?, $\frac{१०}{१२}$ इंच ÷ २ = ?, $\frac{१०}{१२}$ इंच ÷ ५ = ?।

जबानी काम—कागज की पट्टियों की और पटरी की सहायता से तिहाई, छठवें और बारहवें भागों के कुछ ज्ञान हो जाने पर अब तुमको कागज की पट्टी और पटरी के बदले वस्तुओं के और ऐसे राशियों के तिहाई, छठवें आदि भागों पर कुछ जबानी प्रश्न हल करने चाहिए, जिनके तिहाई, छठवें और बारहवें भाग आसानी से किये जा सकते हैं, जैसे पैसे, आने, फुट, गज आदि।

चूँकि ३ पाइयों का एक पैसा और १२ पाइयों का एक आना होता है इसलिए तुम समझ सकते हो कि १ पाई = $\frac{१}{३}$ पैसा और १ पाई = $\frac{१}{१२}$ आना। इसी तरह चूँकि १२ इंच का १ फुट और ३ फुट का १ गज होता है, इसलिए तुम समझ सकते हो कि १ इंच = $\frac{१}{१२}$ फुट और एक फुट = $\frac{१}{३}$ गज।

अभ्यास—१९ (ज़बानी)

कितना हुआ :—

(१) ९ पाइयों का २/३, १८ किताबों का २/३, १२ अमरूदों का १/३, ७४ पैसों का ४/१२, २६ मन का ७/१२।

(२) १८ गज़ का ५/३, २४ फ़ुट का ५/१२, ३६ इंच का ७/१२।

(३) नीचे की राशियों की तुलना करो और बताओ इनमे से कौन-सी भिन्न बराबर हैं :—

१ गज़ का ४/६, १ गज़ का ८/१२, १ रुपया का ३/६, १ रुपया का ६/१२, १ फ़ुट का २/३, १ फ़ुट का ८/१२, १ दिन का २/६, १ दिन का ४/१२, १०/१२ आने, ५/६ आने।

(४) नीचे की भिन्नों मे से कौन कौन-सी बराबर हैं :—

१/३, १/६, ३/६, १/२, ४/६, २/१२, ३/१२, ६/१२, ८/१२, २/४, १/४, १२/१६, ९/१२, ३/४, ६/८, ४/८, १०/१२, ५/६, ७/८, १४/१६, ४/१८ ?

(५) तुम्हारे पिता के पास ७७ आम हैं। वह तुमको कुल का २/३ देते हैं। तो उनसे तुमको कितने आम मिले ?

(६) एक लडके के पास २४ खिलौने थे। इनका १/६ टूट गये तो कितने पूरे हैं ?

(७) एक लड़के ने ३३ गुलाब के फूल तोड़े। इनका १/३ अपनी बहिन को दे दिया तो उसके पास कितने बचे ?

(८) तुम्हारे पिता के पास जितनी गायें थीं उनका $\frac{१}{३}$ खेत में चर रही हैं। गिनने से जाना गया कि वे ५ गायें हैं। बताओ कुल कितनी गायें हैं।

(९) एक आदमी के पास ४३ मुर्गियाँ थीं, जिनमें से ७ मर गईं। बाक़ी जो थीं उनका $\frac{५}{६}$ उसने बेंच दीं, तो कितनी मुर्गियाँ बेची और कितनी रह गई?

(१०) मेरे पास ३२ रुपये थे। इनका $\frac{१}{६}$ मैंने ख़र्च कर डाला; तो बताओ मैंने कितना ख़र्च कर डाला।

(११) एक आदमी ने एक घोड़ा ६०) में बेंच दिया, और इसका $\frac{५}{१२}$ उसने अपनी माँ को दिया तो उसके पास क्या बचा?

(१२) किसी धन का $\frac{७}{१२}$, ८४ रुपया है तो वह कुल धन बताओ।

(१३) मैंने तीन पुस्तकें $२\frac{२}{३}$ आने, $३\frac{१}{६}$ आने, और $४\frac{५}{१२}$ आने में मोल लीं। तो कुल पुस्तकों का क्या मूल्य हुआ?

(१४) अब्दुल्ला प्रतिदिन $२\frac{१}{६}$ घंटे सबेरे और $१\frac{२}{३}$ घंटे सायंकाल मे काम करता है। तो वह कितने घंटे काम करता है?

(१५) एक लड़के ने $४\frac{२}{३}$ गज़ कपड़ा मोल लिया और उसमें से $१\frac{१}{६}$ गज़ काम में लाया, तो बताओ अब उसके पास कितने गज़ कपड़ा बाक़ी रहा।

(१६) एक आने का $\frac{१}{३}$ क्या हुआ? और उसका आधा क्या हुआ? और उसका आधा क्या हुआ?

(१७) एक गज़ का $\frac{१}{३}$ क्या हुआ? और उसका आधा क्या हुआ? और उसका आधा क्या हुआ?

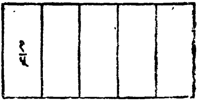
(१८) ४५ गज़ का १५ गज़ कौन-सा भाग है ? ३० गज़ का ५ गज़ कौन-सा भाग है ? और ४८ गज़ का ४ गज़ कौन-सा भाग है ?

(१९) ३ रुपये ९ आने का एक तिहाई क्या हुआ ?, ३ रुपये १२ आने का २/३ क्या हुआ ?, ३ सेर ६ छटाँक का ५/६ क्या हुआ ?, ६ सेर १२ छटाँक का ५/६ क्या हुआ ?, ३ गज़ का १/१२ क्या हुआ ?, ६ गज़ का ५/१२ क्या हुआ ?

(२०) २/३ दिन मे कितने घंटे हुए ?, १/६ दिन में, ५/६ दिन में, ७/१२ दिन में और ११/१२ दिन में कितने घंटे हुए ?

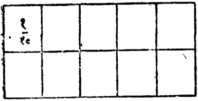
स—पाँचवें और दसवें भाग

कागज़ की पट्टियों की सहायता से प्रयोग—एक कागज़ की पट्टी को ५ बराबर की लम्बाइयों में मोड़ कर तह करो, जैसा कि आकृति १ में दिखाया गया है और फिर खोल कर देखो तो मालूम होगा कि पट्टी के ५ बराबर भाग हो गये हैं। इन भागों में से प्रत्येक पूरी पट्टी का पाँचवाँ भाग कहलाता है और १/५ लिखकर प्रकट किया जाता है।



आकृति १

अब तह की हुई पट्टी को फिर (आकृति २ की भाँति) तह करके खोलो तो तुम देखोगे कि पट्टी के दस बराबर भाग हो गये हैं। इनमें से प्रत्येक भाग पूरी पट्टी का एक दसवाँ भाग कहलाता है और $\frac{१}{१०}$ लिखकर प्रकट किया जाता है।



आकृति ३

प्रयोग १—कागज़ को कई बराबर और एक ही प्रकार की पट्टियाँ लो। इनमें से कुछ को ५ बराबर और कुछ को १० बराबर भागों में बाँटो, जैसा कि हमने ऊपर बताया है। इनमें से नीचे लिखे भागों को कतरनी से काट कर अलग कर लो :—

कुल का $\frac{१}{५}$, $\frac{२}{५}$, $\frac{३}{५}$, $\frac{४}{५}$, $\frac{१}{१०}$, $\frac{२}{१०}$, $\frac{३}{१०}$, $\frac{४}{१०}$, $\frac{५}{१०}$, $\frac{६}{१०}$, $\frac{७}{१०}$, $\frac{८}{१०}$, और $\frac{९}{१०}$।

प्रयोग २—इन भागों की सहायता से दिखाओ कि :—

$\frac{१}{५}=\frac{२}{१०}$, $\frac{२}{५}=\frac{४}{१०}$, $\frac{३}{५}=\frac{६}{१०}$, $\frac{४}{५}=\frac{८}{१०}$ और $\frac{५}{१०}=\frac{१}{२}$, और यह भी दिखाओ कि कुल पट्टी = ५ पाँचवें या १० दसवे भाग अर्थात् $१=\frac{५}{५}=\frac{१०}{१०}$।

अभ्यास—२० (प्रयोगात्मक)

कागज़ की बराबर और एक ही प्रकार की पट्टियाँ लेकर और उनको तह करके ५ बराबर और १० बराबर भाग कर लो और कतरनी से काट कर नीचे के प्रश्नों* के उत्तर निकालो :—

(१) $\frac{१}{५}+\frac{२}{५}=?$, $\frac{२}{५}+\frac{३}{५}=?$, $\frac{१}{१०}+\frac{२}{१०}=?$, $\frac{२}{५}+\frac{१}{१०}=?$, $\frac{३}{१०}+\frac{२}{५}=?$, $\frac{३}{५}+\frac{२}{१०}=?$, $\frac{७}{१०}+\frac{१}{५}=?$, $\frac{१}{१०}+\frac{२}{५}=?$

(२) $१\frac{१}{५}- =?$, $१-\frac{३}{५}=?$, $१-\frac{३}{१०}=?$, $१-\frac{७}{१०}=?$, $\frac{२}{५}-\frac{१}{५}=?$, $\frac{३}{५}-\frac{३}{१०}=?$, $२\frac{३}{५}-१\frac{१}{१०}=?$, $२\frac{२}{५}-२\frac{१}{१०}=?$

(३) $\frac{१}{५}\times२=?$, $\frac{२}{५}\times२=?$, $\frac{३}{५}\times२=?$; $\frac{४}{५}\times५=?$, $\frac{१}{१०}\times२=?$, $\frac{३}{१०}\times२=?$, $\frac{६}{१०}\times५=?$, $\frac{४}{१०}\times२=?$

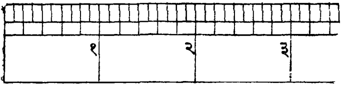
(४) $\frac{२}{५}-२=?$, $\frac{३}{५}\div३=?$, $\frac{४}{५}-४=?$, $\frac{२}{१०}\div२=?$, $\frac{९}{१०}-३=?$, $\frac{८}{१०}\div२=?$, $\frac{८}{१०}-४=?$, $\frac{६}{१०}\div३=?$

पटरी की सहायता से प्रयोग—पटरी के उस किनारे को देखो जो आगे की आकृति में दिखाया गया है। इसमें एक इंच चार बड़ी और खड़ी रेखाओं से पाँच बराबर भागों में बाँटा गया है, जिनमें से प्रत्येक भाग इंच का पाँचवाँ भाग है। इसको $\frac{१}{५}$

---

* अध्यापक जी को चाहिए कि ऐसे ही बहुत-से प्रश्न बना कर अच्छी तरह अभ्यास करावें।

इंच लिखते हैं। ऐसे दो भाग इंच के दो पाँचवें भाग कहलाते हैं और $\frac{२}{५}$ लिखे जाते हैं। इसी प्रकार ३, ४ और ५ बराबर भाग $\frac{३}{५}$, $\frac{४}{५}$ और $\frac{५}{५}$ लिखे जाते हैं।



आकृति १

अपनी पटरी को फिर उठा कर देखो। इसमें इंच का पाँचवाँ भाग भी दो बराबर भागों में बँटा है। इस प्रकार इंच के दस बराबर भाग हो गये हैं जिनमें से प्रत्येक को इंच का दसवाँ कहते हैं और $\frac{१}{१०}$ इंच लिखते हैं। ऐसे दो भाग इंच के दो दसवें कहलाते हैं और $\frac{२}{१०}$ लिखे जाते हैं। इसी प्रकार ३, ४, ५, ६, आदि दसवें $\frac{३}{१०}$, $\frac{४}{१०}$, $\frac{५}{१०}$, $\frac{६}{१०}$, इत्यादि लिखे जाते हैं।

प्रयोग १—अपनी पटरी की सहायता से १$\frac{२}{१०}$ इंच, १$\frac{४}{१०}$ इंच, १$\frac{५}{१०}$ इंच; १$\frac{६}{१०}$ इंच और १$\frac{८}{१०}$ इंच लम्बी रेखाओं की तुलना १$\frac{१}{५}$ इंच, १$\frac{२}{५}$ इंच, १$\frac{१}{२}$ इंच, १$\frac{३}{५}$ इंच और १$\frac{४}{५}$ इंच लम्बी रेखाओं से क्रमशः करो और नीचे के प्रश्नों का उत्तर दो :—

$$\frac{२}{१०}=\frac{१}{५},\ \frac{४}{१०}=\frac{२}{५},\ \frac{५}{१०}=\frac{१}{२},\ \frac{६}{१०}=\frac{३}{५} \text{ और } \frac{८}{१०}=\frac{४}{५}$$ ।

प्रयोग २—अपनी पटरी को देखकर बताओ कि एक इंच में इंच के कितने पाँचवें और कितने दसवें भाग हैं।

अभ्यास—२१ (प्रयोगात्मक)

पहिले की तरह पटरी की सहायता से नीचे के प्रश्नों का उत्तर निकालो :—

(१) $\frac{१}{५}$ इंच + $\frac{२}{५}$ इंच = ?, $\frac{२}{५}$ इंच + $\frac{२}{५}$ इंच = ?, $\frac{२}{५}$ इंच + $\frac{३}{५}$ इंच = ?, $\frac{१}{१०}$ इंच + $\frac{४}{१०}$ इंच = ?, $\frac{६}{१०}$ इंच + $\frac{५}{१०}$ इंच = ?, $\frac{७}{१०}$ इंच + $\frac{३}{१०}$ इंच = ?, $\frac{३}{१०}$ इंच + $\frac{१}{५}$ इंच = ?, और $\frac{१}{१०}$ इंच + $\frac{१}{५}$ इं० = ?

(२) $\frac{३}{५}$ इंच − $\frac{१}{५}$ इंच = ?, $\frac{२}{१०}$ इंच − $\frac{१}{१०}$ इंच = ?, $\frac{४}{५}$ इंच − $\frac{७}{१०}$ इंच = ?, $\frac{३}{५}$ इंच − $\frac{३}{१०}$ इंच = ?, २$\frac{२}{५}$ इंच − १$\frac{३}{१०}$ इंच = ?, १ इंच − $\frac{२}{५}$ इंच = ?, १ इंच − $\frac{३}{१०}$ इंच = ?, और १ इंच − $\frac{९}{१०}$ इंच = ?

(३) $\frac{२}{५}$ इंच × २ = ?, $\frac{४}{५}$ इंच × ५ = ?, $\frac{३}{१०}$ इंच × २ = ?, $\frac{६}{१०}$ इंच × २ = ?, $\frac{७}{१०}$ इंच × २ = ?, और $\frac{३}{१०}$ इंच × १० = ?

(४) $\frac{३}{५}$ इंच ÷ ३ = ?, $\frac{४}{५}$ इंच ÷ ४ = ?, $\frac{२}{१०}$ इंच ÷ २ = ?, $\frac{४}{५}$ इंच ÷ २ = ?; $\frac{९}{१०}$ इंच ÷ ३ = ?, और $\frac{७}{१०}$ इंच ÷ ७ = ?

ज़बानी काम—काग़ज़ की पट्टियों की और पटरी की सहायता से पाँचवें और दसवें भागों का ज्ञान हो जाने पर अब तुमको काग़ज़ की पट्टी और पटरी के बदले वस्तुओं के और ऐसी राशियों के पाँचवें और दसवें भागों पर कुछ ज़बानी प्रश्न हल करने चाहिए, जिनके पाँचवें और दसवें भाग आसानी से किये जा सकते हैं, जैसे मन, घण्टा, मिनट, आदि ।

अभ्यास—२२ (ज़बानी)

नीचे लिखे के मान बताओ :—

(१) २० गेंदों का $\frac{१}{५}$, १५ आमों का $\frac{२}{५}$, २० क़लमों का $\frac{३}{५}$, २५ पेन्सिलों का $\frac{४}{५}$।

(२) ३० लड़कों का $\frac{१}{१०}$, ४० नारंगियों का $\frac{३}{१०}$, १० रुपये का $\frac{७}{१०}$ और २० पैसों का $\frac{९}{१०}$।

(३) नीचे की भिन्नों की तुलना करो और बताओ इनमें से कौन कौन-सी बराबर हैं :—

$\frac{१}{५}$, $\frac{२}{५}$, $\frac{१}{२}$, $\frac{५}{१०}$, $\frac{४}{१०}$, $\frac{३}{५}$, $\frac{२}{१०}$, $\frac{३}{१०}$, $\frac{८}{१०}$, $\frac{४}{५}$।

(४) तुम्हारी माता के पास ३० आम हैं। इनका $\frac{२}{५}$ वे तुमको देती हैं, तो तुमको कितने मिले ?

(५) तुम्हारी कक्षा मे ३३ लड़के हैं। एक दिन उनमें से कुल सख्या के $\frac{२}{३}$ नहीं आये, तो बताओ उस दिन कितने लड़के उपस्थित थे।

(६) अहसानअली के पास ४५ खिलौने थे। इनका $\frac{२}{५}$ उसने छोटी बहिन को दे दिया, तो उसके पास कितने बचे ?

(७) सोहन ने अपने लड्डुओं का $\frac{३}{१०}$ भाग खा लिया, अब उसके पास २५ लड्डू बाक़ी हैं। तो उसके पास पहिले कितने लड्डू थे ?

(८) तुम्हारे पिता ने २$\frac{१}{१०}$ मन चावल, ३$\frac{३}{१०}$ मन गेहूँ और १$\frac{१}{५}$ मन दाल मोल ली, तो उन्होंने कुल कितना अनाज मोल लिया ?

(९) गोपालदास अपने घर पर सवेरे $२\frac{३}{८}$ घंटे और सायंकाल $१\frac{५}{६}$ घंटे पढ़ता है तो वह प्रतिदिन कुल कितने घंटे पढ़ता है ?

(१०) हीरालाल ने कुछ आम मोल लिये, जिनमें से $\frac{७}{१०}$ मीठे थे और बाक़ी खट्टे थे। यदि ६ आम खट्टे थे तो कितने आम मीठे थे ?

(११) कितने हुए ?—$२\frac{३}{८}$ इंच + $१\frac{५}{८}$ इंच, $१\frac{३}{८}$ मन + $२\frac{१}{१०}$ मन, $१\frac{५}{८}$ मन + $२\frac{३}{१०}$ मन, $२\frac{३}{४}$ घटे + $१\frac{९}{१०}$ घंटे, $१\frac{७}{१०}$ घंटे + $२\frac{५}{८}$ घंटे, $४\frac{३}{८}$ मिनट + $२\frac{५}{८}$ मिनट।

(१२) मान निकालो :—

$२\frac{३}{८}$ इंच − $१\frac{३}{८}$ इंच, $१\frac{५}{८}$ इंच − $१\frac{१}{१०}$ इंच, $२\frac{३}{१०}$ मन − $१\frac{३}{८}$ मन, $३\frac{३}{८}$ मन − $१\frac{७}{१०}$ मन, $२\frac{५}{८}$ घंटे − $१\frac{३}{१०}$ घंटे, $३\frac{३}{८}$ घटे − $१\frac{९}{१०}$ घंटे।

(१३) एक बनिये के पास ४० मन गेहूँ थे। इसने इसका $\frac{३}{१०}$ एक महीने में और $\frac{३}{८}$ दूसरे महीने में बेंच दिया; तो कितने मन गेहूँ उसके पास बाक़ी रहे ?

(१४) एक दानी प्रतिमहीने $१\frac{३}{१०}$ मन चावल दान करता है; बताओ ५ महीने में वह कितने चावल पुण्यार्थ देता है।

(१५) एक लड़का प्रतिदिन $\frac{५}{८}$ घटे खेला करता है तो, १० दिन में वह कितने घंटे खेलेगा ?

(१६) १० रुपये प्रतिमन के भाव से $४\frac{३}{१०}$ मन चावल के क्या दाम होंगे ?

(१७) एक मन का $\frac{१}{५}$ क्या हुआ ? उसका आधा क्या हुआ ?

(१८) १२ मिनट एक घंटे का कौन-सा भाग है ? ६ मिनट कौन-सा ?

(१९) २ मन का $\frac{१}{५}$ कितना हुआ ? और ३ मन का $\frac{३}{५}$, १ मन २० सेर का $\frac{३}{५}$, १ घंटा १० मिनट का $\frac{४}{५}$, २ मन ३० सेर का $\frac{३}{१०}$ और २ घंटे ३० मिनट का $\frac{७}{१०}$ कितना हुआ ?

(२०) एक मन के $\frac{२}{५}$ भाग में कितने सेर हुए ? $\frac{३}{५}$ मन में कितने सेर हुए ? $\frac{३}{१०}$ मन और $\frac{१}{१०}$ मन में कितने सेर हुए ?

१ घंटा के $\frac{४}{५}$ में, $\frac{३}{१०}$ में, और $\frac{२}{५}$ भाग में कितने मिनट हुए ?

१—भिन्न की परिभाषा

$\frac{१}{२}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{४}{५}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{७}{८}$, $\frac{३}{१०}$, $\frac{५}{१२}$, $\frac{६}{१६}$, आदि ऐसे भागों को, जिनका ज्ञान तुम्हें ऊपर के प्रयोग और मौखिक क्रिया की सहायता से हो चुका है भिन्न कहते हैं। अर्थात्, जब किसी वस्तु या पूर्ण राशि के बराबर बराबर भाग किये जाते हैं, तो इनमें से एक या एक से अधिक भागों को उस पूर्ण राशि की भिन्न कहते हैं। जैसे, यदि किसी चीज़ को हम ८ बराबर भागों में बाँटें और इनमें से ३ भाग ले तो इनको उस चीज़ के तीन आठवें कहेंगे और भिन्न $\frac{३}{८}$ से प्रकट करेंगे।

ऐसी भिन्नों में नीचे की संख्या को **हर** कहते हैं, जिसका यह तात्पर्य है कि उस चीज़ के कितने बराबर भाग किये गये हैं; और ऊपर की संख्या को **अंश** कहते हैं, जिसका यह तात्पर्य है कि कितने भाग लिये गये हैं।

यदि हम एक रुपये का ५/८ कहें तो इससे हमारा यह अभिप्राय है कि एक रुपया ८ बराबर भागों में बाँटा गया, जिनमें से प्रत्येक भाग दो आने के बराबर है, और इन भागों में से ५ भाग, अर्थात् १० आने लिये गये हैं। ५/८ रुपये का केवल यही अर्थ नहीं है कि एक रुपये को आठवें भागों में बाँटा गया है और ५ आठवें लिये गये हैं, वरन् यह अर्थ भी है कि ५ रुपये अर्थात् ५ × १६ या ८० आनों को ८ बराबर भागों में बाँटा है जिनमें से प्रत्येक भाग १० आने के बराबर है। इसलिए, प्रत्येक अंश को भाज्य और प्रत्येक हर को भाजक कह सकते हैं। इस प्रकार यदि १२ को ४ बराबर भागों में बाँटना हो तो हम १२ ÷ ४ या संक्षेप रूप में १२/४ लिख सकते हैं। इसी तरह ५ गज़ ÷ १२ को ५/१२ गज़ और ६ रुपये ÷ ६ को ६/६ रुपया और ८ फ़ुट ÷ ३ को ८/३ फ़ुट लिख सकते हैं।

अब तक तुमको हमने ऐसी भिन्नें बताई थीं जिनके हर २, ३, ४, ५, ६, ८, १०, १२, और १६ थे; लेकिन चूँकि किसी चीज़ को ७, ९, ११, १३, १४, १५, १७, १८, १९, और २० इत्यादि बराबर भागों में भी बाँट सकते हैं और इनमें से एक या अधिक भाग ले सकते हैं, इसलिए तुम्हें आगे ऐसी भिन्नें भी मिलेंगी जिनके हरों में बड़ी बड़ी संख्यायें होंगी, जैसे १/७, ३/७, ४/९, ५/११, ६/१३, १/१४, ७/१८, १०/१७, १/१९, १७/२०, इत्यादि। और चूँकि हम किसी चीज़ को कई बराबर भागों में बाँट सकते हैं इसलिए तुम समझ सकते हो कि हर में कोई भी संख्या आ सकती है। लेकिन हम अधिकतर ऐसी ही भिन्न लेंगे जिनके हर छोटी सख्यायें हों।

अभ्यास २३ (१ से २० तक ज़बानी)

निम्नलिखित भिन्नों के मान बताओ :—

(१) १ रु० का $\frac{७}{१६}$। (२) १ रु० का $\frac{५}{८}$।
(३) १ मन का $\frac{७}{२०}$। (४) १ मन का $\frac{३}{४०}$।
(५) २ मन का $\frac{६}{१०}$। (६) २ मन का $\frac{११}{२०}$।
(७) २ मन का $\frac{१६}{४०}$। (८) २ मन का $\frac{३}{१६}$।
(९) १ घंटे का $\frac{७}{६०}$। (१०) १ घटे का $\frac{११}{३०}$।
(११) १ मिनट का $\frac{६}{२०}$। (१२) १ मिनट का $\frac{४}{१५}$।
(१३) १ दिन का $\frac{५}{२४}$। (१४) १ दिन का $\frac{७}{१२}$।
(१५) १ सप्ताह का $\frac{३}{७}$। (१६) १ सप्ताह का $\frac{५}{७}$।
(१७) २ से० का $\frac{५}{३२}$। (१८) ३ दिन का $\frac{७}{१८}$।
(१९) १ गज़ का $\frac{७}{३६}$। (२०) ६ गज़ का $\frac{५}{१८}$।
(२१) १ मील का $\frac{७}{४४}$। (२२) १ मील का $\frac{१०}{११}$।
(२३) १ मील का $\frac{३५}{८८}$। (२४) ५ घंटे का $\frac{१३}{६०}$।
(२५) ४ घटे का $\frac{११}{१५}$। (२६) ५ घटे का $\frac{७}{२५}$।
(२७) ४ रु० १० आ० का $\frac{५}{३७}$। (२८) ४ रु० ६ आ० का $\frac{९}{१४}$।
(२९) ५ रु० १ आ० का $\frac{८}{२७}$। (३०) ६ रु० ४ आ० का $\frac{१३}{५०}$।
(३१) २ मन १६ सेर का $\frac{१९}{२४}$। (३२) १ मन १६ सेर का $\frac{१५}{२८}$।
(३३) १ घटा २५ मि० का $\frac{५}{१७}$। (३४) २ घटा ४० मि० का $\frac{१९}{३२}$।
(३५) ५ ग० १ फ़ु० ८ इ० का $\frac{७}{२५}$। (३६) ८ ग० २ फी० ६ इं० का $\frac{२०}{५३}$

(३७) १५ से १० छ० का $\frac{३}{२६}$। (३८) १० से० १० छ० का $\frac{३५}{३४}$।
(३९) ११ स० ४ दि० का $\frac{५}{२७}$। (४०) ६ दि० १२ घंटा का $\frac{३०}{३६}$।

२—समभिन्न, विषम भिन्न और मिश्रसंख्या

ऐसी भिन्न, जैसे $\frac{५}{१९}$, $\frac{५}{८}$, $\frac{३}{७}$, $\frac{२}{९}$ इत्यादि, जिनमें अंश हर से कम होता है सम भिन्न कहलाती हैं, क्योंकि इनसे पूरी चीज के भाग प्रकट होते हैं। लेकिन, ऐसी भिन्न, जैसे $\frac{४}{४}$, $\frac{६}{६}$, $\frac{३}{३}$, या $\frac{५}{४}$, $\frac{१७}{६}$, $\frac{१७}{३}$, $\frac{२५}{१२}$, और $\frac{२३}{१६}$ इत्यादि, जिनमें अंश हर के बराबर या उससे बड़ा हो, विषम भिन्न कहलाती हैं, क्योंकि इनसे पूरी चीज के भाग प्रकट नहीं होते, बरन उसके बराबर या उससे अधिक भाग प्रकट होते हैं।

पटरी की सहायता से रेखाये खींचने के लिए जो अभ्यास दिये गये थे उनमें तुमने प्राय $\frac{३}{४}$ इच, $\frac{२}{३}$ इच, $\frac{३}{३}$ इच, $\frac{४}{४}$ इच और $\frac{५}{५}$ इच इत्यादि ऐसी भिन्नों का ही केवल प्रयोग नहीं किया, वरन $४\frac{१}{२}$ इच, $२\frac{३}{३}$ इंच, $२\frac{३}{५}$ इंच, $४\frac{५}{६}$ इच, $१\frac{३}{८}$ इच इत्यादि ऐसी सख्याओं का भी प्रयोग किया है। ऐसी सख्याओं को, जिनमें पूर्णांक सख्या और सम भिन्न दोनों हों, मिश्रसंख्या कहते हैं।

तुम किसी मिश्रसख्या को सदा विषम भिन्न के रूप में लिख सकते हो। ऊपर के उदाहरणों मे जो मिश्रसख्याये दी गई हैं उनको तुम पटरी की सहायता से विषम भिन्न के रूप मे लिख सकते हो, जैसे :—

$४\frac{१}{२}$ इच = ४ इंच + $\frac{१}{२}$ इच = ४ × २ आधे इच + १ आधा इंच = ८ आधे इच + १ आधा इच = ९ आधे इच = $\frac{९}{२}$ इच।

$२\frac{२}{३}$ इंच = २ इंच + $\frac{२}{३}$ इंच = २ × ३ तिहाई इंच + २ तिहाई इंच = ६ तिहाई इंच + २ तिहाई इंच = ८ तिहाई इंच = $\frac{८}{३}$ इंच।

$१\frac{३}{८}$ इंच = १ इंच + $\frac{३}{८}$ इंच = १ × ८ आठवाँ इंच + ३ आठवाँ इंच = ८ आठवाँ इंच + ३ आठवाँ इंच = ११ आठवाँ इंच = $\frac{११}{८}$ इंच। इत्यादि, इत्यादि।

ऊपर के उदाहरणों* को ध्यानपूर्वक देखने से ज्ञात होता है कि किसी मिश्रसंख्या को जब विषम भिन्न के रूप में लाना होता है तो पूर्णांक संख्या को हर से गुणा करते हैं और उसमें अंश को जोड़ लेते हैं। योगफल विषम भिन्न का अंश हो जाता है और हर वही रहता है जो मिश्र-संख्या में था।

इसी तरह तुम विषम भिन्नों को भी मिश्रसंख्याओं के रूप में ला सकते हो। जैसे ऊपर के उदाहरणों में विषम भिन्नों को अपनी पटरी की सहायता से मिश्रसंख्याओं में बदल सकते हो :—

$\frac{९}{२}$ इंच = $\frac{२}{२}$ इंच + $\frac{२}{२}$ इंच + $\frac{२}{२}$ इंच + $\frac{२}{२}$ इंच + $\frac{१}{२}$ इंच = १ इंच १ इंच + १ इंच + १ इंच + $\frac{१}{२}$ इंच = $४\frac{१}{२}$ इंच।

---

*अध्यापक को चाहिए कि श्यामपट्ट पर भिन्न भिन्न राशियों के मिश्र-संख्याओं के उदाहरण दें, जैसे—$२\frac{३}{४}$ रुपये = $\frac{११}{४}$ रुपये, $३\frac{४}{५}$ मन = $\frac{१९}{५}$ मन, $४\frac{२}{३}$ गज़ = $\frac{१४}{३}$ गज़, इत्यादि। इसके पीछे लड़कों से रीति निकलवायें।

$\frac{८}{३}$ इंच = $\frac{३}{३}$ इंच + $\frac{३}{३}$ इंच + $\frac{२}{३}$ इंच = १ इंच + १ इंच + $\frac{२}{३}$ इंच = २$\frac{२}{३}$ इंच।

$\frac{११}{८}$ इंच = $\frac{८}{८}$ इंच + $\frac{३}{८}$ इंच = १ इंच + $\frac{३}{८}$ इंच = १$\frac{३}{८}$ इंच।
अर्थात् $\frac{११}{८}$ इंच = १$\frac{३}{८}$ इंच।

ऊपर के उदाहरणों* को ध्यानपूर्वक देखने से ज्ञात होता है कि किसी विषम भिन्न को मिश्रसंख्या में लाना हो तो अंश को हर से भाग देते हैं। इस तरह जो भागफल आता है उसे मिश्रसंख्या का पूर्णांक बनाते हैं और शेष को भिन्न का अंश रहने देते हैं। हर वही रहने देते हैं जो विषम भिन्न में था।

उदाहरण १—८ फ़ुट को एक गज़ की विषम भिन्न और मिश्रसख्या में प्रकट करो।

१ फ़ुट १ गज़ का $\frac{१}{३}$ होता है, इसलिए ८ फ़ुट १ गज़ का $\frac{८}{३}$ हुआ या २$\frac{२}{३}$ गज़।

उदाहरण २—१ मन के $\frac{४३}{८}$ का मान निकालो।

१ मन का $\frac{४३}{८}$ = ५$\frac{३}{८}$ मन = ५ मन और १ मन का $\frac{३}{८}$।

---

*अध्यापक को चाहिए कि भिन्न भिन्न राशियों की विषम भिन्नों को श्यामपट्ट पर लिख कर समझायें, जैसे—$\frac{१३}{२}$ रुपये = ६$\frac{१}{२}$ रुपये, $\frac{१८}{५}$ मन = ३$\frac{३}{५}$ मन, $\frac{११}{३}$ गज़ = ३$\frac{२}{३}$ गज़, इत्यादि। फिर रीति निकलवायें।

अब चूँकि मन का आठवाँ भाग, अर्थात् $\frac{१}{८}$ मन = ५ सेर, इसलिए १ मन का तीन आठवाँ "$\frac{३}{८}$" = ५ × ३ या १५ सेर। इस प्रकार ५$\frac{३}{८}$ मन = ५ मन १५ सेर।

उदाहरण ३—$\frac{५६}{७}$ गज़ का मान निकालो।

रीत्यनुसार $\frac{५६}{७}$ विषम भिन्न को मिश्रसंख्या में बदलने से ८ गज़ आया। इससे जाना गया कि ८ गज़ को हम विषम भिन्न के रूप में लिखना चाहें तो $\frac{५६}{७}$ गज़ बन सकता है, अर्थात् हम किसी पूर्णांक संख्या को विषम भिन्न में ला सकते हैं। तुम्हारे अध्यापक जी और भी ऐसे ही उदाहरण श्यामपट्ट पर दिखायेंगे जिनसे तुम आसानी से समझ जाओगे कि कोई पूर्णांक संख्या विषम भिन्न में लाई जा सकती है जब कि उसका कोई हर दिया हुआ हो, क्योंकि हम अंश को हर से गुणा देकर विषम भिन्न का अंश बना सकते हैं।

उदाहरण ४—४५ छटाँकों को केवल सेरों में लिखो।
४५ छटाँक = (४५ ÷ १६) सेर = $\frac{४५}{१६}$ सेर = २$\frac{१३}{१६}$ सेर।

अभ्यास २४ (१ से ५ तक ज़बानी)

१—नीचे की भिन्नों में सम भिन्न, विषम भिन्न और मिश्र-संख्यायें बताओ :—

(१) १$\frac{३}{४}$ रुपये (२) $\frac{२३}{१६}$ रुपये (३) $\frac{८}{९}$ गज़ (४) $\frac{४}{१०}$ गज़
(५) २$\frac{५}{८}$ रुपये (६) $\frac{११}{१२}$ आने (७) $\frac{८}{१६}$ आने (८) १$\frac{३}{८}$ मन

(९) ४$\frac{१}{३}$ फ़ुट (१०) $\frac{४३}{२}$ सेर (११) $\frac{८}{१८}$ (१२) १$\frac{३}{१७}$ (१३) २$\frac{३}{७}$ (१४) $\frac{१०}{१९}$ (१५) $\frac{१६}{१६}$ (१६) $\frac{३५}{२०}$ (१७) $\frac{३७}{११}$ (१८) $\frac{१६}{१४}$ (१९) $\frac{४}{२८}$ (२०) $\frac{१}{१८}$ ।

२—विषम भिन्न में लिखो :—

(१) १$\frac{३}{७}$ रुपये (२) ७$\frac{३}{१०}$ मन (३) ४$\frac{७}{१६}$ सेर (४) २$\frac{५}{१६}$ गज़ (५) २$\frac{५}{१२}$ फ़ुट (६) ४$\frac{३}{११}$ (७) ३$\frac{४}{१८}$ (८) ३$\frac{३}{१९}$ (९) ४$\frac{७}{२०}$ (१०) १$\frac{५}{२१}$ ।

३—मिश्रसंख्या में लिखो :—

(१) $\frac{३५}{१०}$ रुपये (२) $\frac{६१}{१०}$ मन (३) $\frac{९२}{१२}$ सेर (४) $\frac{३५०}{९}$ गज़ (५) $\frac{२४}{९}$ फ़ुट (६) $\frac{१४५}{१२}$ इंच (७) $\frac{४३}{१३}$ (८) $\frac{६७}{२०}$ (९) $\frac{३४३}{९}$ (१०) $\frac{६१}{८१}$ ।

४—मान बताओ :—

(१) $\frac{२३}{४}$ मन (२) $\frac{१२७}{१६}$ सेर (३) $\frac{७३}{८}$ रुपये (४) $\frac{५९}{६}$ रुपये (५) $\frac{३४७}{९}$ गज़, (६) $\frac{१७}{८}$ गज़ (७) $\frac{७६}{१०}$ घंटे (८) $\frac{९९}{६}$ घंटे (९) $\frac{३१}{३०}$ फ़ुट (१०) $\frac{७५}{२४}$ दिन ।

५—भिन्न के रूप में परिवर्त्तन करो :—

(१) १४ फ़ुट और २९ फ़ुट को केवल गज़ों में; (२) २३ इंच और ४९ इंच को केवल फ़ुटों में (३) ३५ छटाँक और ६३ छटाँकों को केवल सेरों में (४) ४३ आने और ९५ आनों को केवल रुपयों में (५) १४६ पाइयां और १८५ पाइयों को केवल आनों मे ।

६—निम्नलिखित भिन्नों को विषम भिन्नों में लाओ :—

(१) $११\frac{५}{२३}$; (२) $३\frac{१०}{२१३}$ (३) $१८\frac{५}{१९}$ (४) $१७\frac{११}{२८}$ (५) $११\frac{५}{६३}$ (६) $४\frac{८}{३६८}$ (७) $१७\frac{३}{३८}$ (८) $२०\frac{११}{४८}$ (९) $५\frac{१७}{६१७}$ (१०) $१४\frac{३०}{११९}$ ।

७—निम्नलिखित विषम भिन्नों को मिश्रसंख्या या पूर्णांक बनाओ :—

(१) $\frac{८९}{२३}$ (२) $\frac{४४०}{२९}$ (३) $\frac{९३६}{८४७}$ (४) $\frac{३८५}{३१७}$ (५) $\frac{२६९}{१६३}$ (६) $\frac{७७५}{३१}$ (७) $\frac{२४१७}{४९}$ (८) $\frac{६९८४}{४८१}$ (९) $\frac{९९९९}{३४७}$ (१०) $\frac{३९५८५}{१४४}$ ।

३—भिन्नों की समानता संक्षेप और समहर

तुमने पटरी की सहायता से भिन्नों का जो सरल अभ्यास किया था और काग़ज़ की पट्टियों को तह करके तथा कतर के एक दूसरे के ऊपर रक्खा था, उसमें तुमने ध्यान दिया होगा कि :—

$\frac{१}{२}$ इंच $= \frac{२}{४}$ इंच $= \frac{३}{६}$ इंच,

$\frac{२}{३}$ इंच $= \frac{४}{६}$ इंच $= \frac{८}{१२}$ इंच,

$\frac{३}{४}$ इंच $= \frac{६}{८}$ इंच $= \frac{९}{१२}$ इंच $= \frac{१२}{१६}$ इंच,

$\frac{४}{५}$ इंच $= \frac{८}{१०}$ इंच,

$\frac{५}{६}$ इंच $= \frac{१०}{१२}$ इंच,

$\frac{७}{८}$ इंच $= \frac{१४}{१६}$ इंच, इत्यादि ।

ऐसी सब भिन्न, जैसे—$\frac{१}{२}$, $\frac{२}{४}$, $\frac{३}{६}$, $\frac{४}{८}$, $\frac{५}{१०}$, $\frac{६}{१२}$, $\frac{८}{१६}$ इत्यादि, जो आपस में बराबर होती हैं **समान भिन्न** कहलाती हैं ।

इसी तरह ऐसी भिन्न, जैसे—$\frac{२}{३}$, $\frac{४}{६}$, $\frac{८}{१२}$, या $\frac{३}{४}$, $\frac{६}{८}$, $\frac{९}{१२}$, $\frac{१२}{१६}$ इत्यादि भी समान भिन्नें हैं।

अब तुम यदि ऊपर की भिन्नों को देखो, जो $\frac{१}{२}$ के बराबर हैं और उनके अंश और हरों की परस्पर तुलना करो तो तुमको मालूम होगा कि ये सब भिन्नें $\frac{१}{२}$ के अंश और हर को एक ही संख्या के गुण देने से बनी हैं, जैसे:—

$$\frac{२}{४}=\frac{१\times२}{२\times२},\quad \frac{३}{६}=\frac{१\times३}{२\times३},\quad \frac{४}{८}=\frac{१\times४}{२\times४},\quad \frac{५}{१०}=\frac{१\times५}{२\times५}$$

$$\frac{६}{१२}=\frac{१\times६}{२\times६},\quad \frac{८}{१६}=\frac{१\times८}{२\times८}$$

इसी तरह $\frac{२}{३}$ के बराबर निम्नलिखित भिन्नें बनी हैं:—

$$\frac{४}{६}=\frac{२\times२}{३\times२},\quad \frac{६}{९}=\frac{२\times३}{३\times३},\quad \frac{८}{१२}=\frac{२\times४}{३\times४}।$$

यही दशा और भिन्नों की भी है।

$\frac{१}{२}$ की समान भिन्नों को फिर ध्यानपूर्वक देखो। इनके अंश और हरों में एक ही संख्या का भाग दिया जाय तो $\frac{१}{२}$ के अंश और हर मिल सकते हैं, जैसे:—

$$\frac{१}{२}=\frac{२\div२}{४\div२}=\frac{३\div३}{६\div३}=\frac{४\div४}{८\div४}=\frac{५\div५}{१०\div५}=\frac{६\div६}{१२\div६}=\frac{८\div८}{१६\div८}$$

इसी तरह $\frac{२}{३}$ के अंश और हर मिल सकते हैं, अर्थात्—

$\frac{२}{३}=\frac{४\div२}{६\div२}=\frac{६\div३}{९\div३}=\frac{८\div४}{१२\div४}$। यही फल और समान भिन्नों में भी निकलता है।

इन उदाहरणों* पर ध्यान देने से यह फल निकलता है कि यदि अंश और हर दोनों को एक ही संख्या से गुणा दें तो भिन्न के मान में कुछ अन्तर नहीं पड़ता, और यदि दोनों में एक ही संख्या से भाग दें तो भी मान में कुछ अन्तर नहीं पड़ता।

इस तरह तुम किसी भिन्न के अंश और हर में एक ही संख्या का गुणा देकर समान भिन्न बना सकते हो। या जहाँ सम्भव हो, एक ही संख्या से भाग देकर उसको छोटे रूप में बदल सकते हो।

उदाहरण १—नीचे की भिन्नों को $\frac{१}{३}$ के बराबर करो:—

$\frac{१}{३} = \frac{}{६} = \frac{}{९} = \frac{}{१२} = \frac{}{१५} = \frac{}{१८} = \frac{}{२१} = \frac{}{२४}$।

चूँकि $६ = ३ \times २$, $९ = ३ \times ३$, $१२ = ३ \times ४$, $१५ = ३ \times ५$, $१८ = ३ \times ६$, $२१ = ३ \times ७$, $२४ = ३ \times ८$,

इसलिए $\frac{१}{३} = \frac{१ \times २}{३ \times २} = \frac{१ \times ३}{३ \times ३} = \frac{१ \times ४}{३ \times ४} = \frac{१ \times ५}{३ \times ५} = \frac{१ \times ६}{३ \times ६} = \frac{१ \times ७}{३ \times ७} = \frac{१ \times ८}{३ \times ८}$;

अर्थात $\frac{१}{३} = \frac{२}{६} = \frac{३}{९} = \frac{४}{१२} = \frac{५}{१५} = \frac{६}{१८} = \frac{७}{२१} = \frac{८}{२४}$।

---

* अध्यापक को चाहिए कि श्यामपट्ट पर उदाहरण लेकर लड़कों से फल निकलवायें। इस तरह रीति के निकालने व समझने मे लड़कों को कोई कठिनाई न पड़ेगी।

उदाहरण २—$\frac{३}{४}$ को ऐसी समान भिन्न में बदलो जिसका हर २४ हो।

चूँकि समान भिन्न का हर = २४ = ४ × ६ = दी हुई भिन्न का हर × ६,

इसलिए समान भिन्न का अंश = दी हुई भिन्न का अंश × ६

$\therefore \frac{३}{४} = \frac{३ \times ६}{४ \times ६} = \frac{१८}{२४}$।

उदाहरण ३—$\frac{३}{५}$, $\frac{७}{१०}$ और $\frac{५}{६}$ को ऐसी समान भिन्नों में बदलो जिनमें प्रत्येक का हर ३० हो।

चूँकि $\frac{३}{५}$ के हर को ३० करना है, अर्थात् ६ से गुणा देना है, इसलिए उसके अंश ३ को भी ६ से गुणा देना होगा, नहीं तो, मान में अन्तर पड़ जायगा।

$\therefore \quad \frac{३}{५} = \frac{३ \times ६}{५ \times ६} = \frac{१८}{३०}$।

इसी तरह, $\frac{७}{१०} = \frac{७ \times ३}{१० \times ३} = \frac{२१}{३०}$।

और $\quad \frac{५}{६} = \frac{५ \times ५}{६ \times ५} = \frac{२५}{३०}$।

इस तरह $\frac{३}{५}$, $\frac{७}{१०}$, और $\frac{५}{६}$ को एक ही हर ३० रखनेवाली $\frac{१८}{३०}$, $\frac{२१}{३०}$ और $\frac{२५}{३०}$ भिन्नों के रूप में ले आये, अर्थात् इन भिन्नों को समहर कर लिया। अभिप्राय यह है कि, सबका एक ही हर बना लिया।

उदाहरण ४—नीचे लिखी भिन्नों का रूप पूरा करो :—

$$\frac{१२}{२४} = \frac{\quad}{१२} = \frac{\quad}{८} = \frac{\quad}{६} = \frac{\quad}{४} = \frac{\quad}{२}$$

चूँकि १२ = २४ ÷ २, ८ = २४ ÷ ३, ६ = २४ ÷ ४, ४ = २४ ÷ ६, २ = २४ ÷ १२,

$$\text{इसलिए, } \frac{१२}{२४} = \frac{१२ \div २}{२४ \div २} = \frac{१२ \div ३}{२४ \div ३} = \frac{१२ \div ४}{२४ \div ४} = \frac{१२ \div ६}{२४ \div ६} = \frac{१२ \div १२}{२४ \div १२} ।$$

$$\text{अर्थात् } \frac{१२}{२४} = \frac{६}{१२} = \frac{४}{८} = \frac{३}{६} = \frac{२}{४} = \frac{१}{२}$$

यहाँ तुम देखते हो कि सब भिन्नों में $\frac{१}{२}$ का रूप सबसे छोटा है। इसी तरह $\frac{१२}{१६}$ की सब भिन्नों में, जो ऊपर दी गई हैं, $\frac{३}{४}$ सबसे कम है। ऐसी भिन्नों को जैसे $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{२}{३}$ और $\frac{३}{८}$ इत्यादि, जिनके अंश और हर में किसी संख्या का भाग देकर सबसे छोटा रूप बना लिया गया है, संक्षेप भिन्न कहते हैं। इस उदाहरण में $\frac{१२}{२४}$ का संक्षेप किया गया है। संक्षेप करने से $\frac{१}{२}$ आया है।

उदाहरण ५—$\frac{१८}{२४}$ को संक्षेप करो।

$$\frac{१८}{२४} = \frac{१८ \div २}{२४ \div २} = \frac{९}{१२} = \frac{९ \div ३}{१२ \div ३} = \frac{३}{४}$$

पहिले हमने इस भिन्न के अंश १८ और हर २४ को २ से भाग दिया, क्योंकि ये दोनों संख्याएँ २ से पूरी पूरी बँट जाती हैं। फिर भागफल ९ और १२ को देखा तो जान पड़ा कि दोनों

२ से पूरा नहीं बँट सकतीं किन्तु ३ से पूरी पूरी बार बँट जाती हैं। इस प्रकार $\frac{१८}{२४}$ की $\frac{३}{४}$ ऐसी समान भिन्न ज्ञात हुई जो अब और छोटी नहीं हो सकती। इसलिए $\frac{१८}{२४}$ को संक्षेप करने से $\frac{३}{४}$ आया। प्रश्नों के लगाने में भाग इत्यादि की क्रिया को हम ज़बानी करते हैं, केवल फल को उत्तर के रूप मे लिख देते हैं, जैसे नीचे दिखाया गया है:—

$$\frac{१८}{२४} = \frac{९}{१२} = \frac{३}{४}$$

अभ्यास २५ (ज़बानी)

(१) नीचे की भिन्नों के अंशों को पूरा करके $\frac{३}{४}$ रुपये के बराबर करो :—

$\frac{३}{४}$ रुपया $= \frac{\quad}{८}$ रुपया $= \frac{\quad}{१२}$ रुपया $= \frac{\quad}{१६}$ रुपया $= \frac{\quad}{२०}$ रुपया $= \frac{\quad}{२४}$ रुपया।

(२) नीचे की भिन्नों के हरों को पूरा करके $\frac{३}{४}$ फुट के बराबर करो :—

$\frac{३}{४}$ फुट $= \frac{४}{\quad}$ फुट $= \frac{६}{\quad}$ फुट $= \frac{८}{\quad}$ फुट $= \frac{१०}{\quad}$ फुट $= \frac{१२}{\quad}$ फुट।

(३) नीचे की भिन्नों मे अंशों और हरों को पूरा करो :—

$$\frac{३}{५} = \frac{\quad}{१०} = \frac{९}{\quad} = \frac{\quad}{२०} = \frac{२१}{\quad} = \frac{\quad}{२५} = \frac{३०}{\quad}$$

(४) नीचे की भिन्नों को इस प्रकार समहर करो कि प्रत्येक का हर ३६ हो :—

$\frac{१}{२}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{१}{६}$ और $\frac{१}{१२}$ ।

(५) इन सब भिन्नों का हर ४८ बनाओ :—

$\frac{३}{४}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{३}{८}$, $\frac{७}{१२}$ और $\frac{९}{१६}$ ।

(६) $\frac{१}{२}$ मन, $\frac{२}{५}$ मन और $\frac{३}{५}$ में एक मन के कितने दसवें भाग हैं ?

(७) $\frac{२}{३}$ गज, $\frac{१}{२}$ गज और $\frac{५}{६}$ गज में एक गज के कितने बारहवें भाग हैं ?

(८) इन भिन्नों को पूरा करो—(१) $\frac{३६}{४८} = \frac{१२}{\ } = \frac{३}{\ }$
(२) $\frac{३०}{३६} = \frac{\ }{१८} = \frac{\ }{६}$ (३) $\frac{४०}{४८} = \frac{\ }{२४} = \frac{\ }{१०} = \frac{\ }{६}$

(९) संक्षेप करो :—

(१) $\frac{१०}{१२}$ (२) $\frac{१५}{२०}$ (३) $\frac{१८}{३०}$ (४) $\frac{४८}{५६}$ (५) $\frac{२०}{२४}$ (६) $\frac{२५}{३०}$
(७) $\frac{३६}{४८}$ (८) $\frac{२८}{४२}$ (९) $\frac{१५}{६०}$ (१०) $\frac{२०}{५०}$

(१०) नीचे लिखी हुई राशियों को समभिन्न या मिश्रसंख्या के संक्षिप्त रूप में परिवर्तन करो :—

(१) १० आने (२) १४ आने (३) ९ इंच (४) १८ इंच
(५) ६ छटाँक (६) २४ छटाँक (७) १५ सेर (८) २५ सेर
(९) ४८ सेर (१०) २६ पाइयाँ ।

अभ्यास २६

(१) निम्नलिखित भिन्नों को ऐसी समान भिन्नों में लाओ जिनका समहर १०८ हो —

$\frac{१}{१८}$, $\frac{५}{१८}$, $\frac{११}{३६}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{२}{३}$ और $\frac{५}{६}$ ।

(२) निम्नलिखित भिन्नों को ऐसी समान भिन्नों में प्रकट करो जिनका समहर ५४० हो —

$\frac{३}{४}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{१७}{२०}$, $\frac{७}{९}$, $\frac{१३}{३०}$, $\frac{३२}{१३५}$ और $\frac{३५}{३६}$ ।

(३) $\frac{६३}{४७}$ को ऐसी समान भिन्न मे लाओ जिसका हर ५६४ है ।

(४) $\frac{५०}{९१}$ को ऐसी समान भिन्न मे लाओ जिसका हर ८१९ हो ।

(५) $\frac{२६}{६५}$ को ऐसी समान भिन्न मे लाओ जिसका हर ५ हो ।

निम्नलिखित भिन्नों को सबसे छोटे रूप मे लाओ —

(६) $\frac{१८२}{१९६}$, (७) $\frac{३१२}{३७८}$, (८) $\frac{४८६}{२१०}$, (९) $\frac{८४}{१७०}$, (१०) $\frac{३६०}{६५०}$, (११) $\frac{१३२}{२५२}$, (१२) $\frac{१२६}{३१५}$, (१३) $\frac{३१५}{३५७}$, (१४) $\frac{६९३}{८१९}$, (१५) $\frac{८५०}{१७००}$, (१६) $\frac{३४६}{६५०}$, (१७) $\frac{७६२}{६२४}$, (१८) $\frac{८९१}{१२२१}$, (१९) $\frac{७५६}{११५५}$, (२०) $\frac{८८८}{१७०२}$, (२१) $\frac{१००८}{२६६४}$, (२२) $\frac{३४५१}{७३६५}$, (२३) $\frac{७२४}{१२५७}$, (२४) $\frac{११११}{५६४०}$, (२५) $\frac{७८३}{१३०५}$, (२६) $\frac{९२५}{५०२५}$, (२७) $\frac{१४७६}{१०६४}$, (२८) $\frac{२५६}{१०२४}$, (२९) $\frac{१७७५}{२३००}$, (३०) $\frac{७६८}{२५९२}$ ।

भिन्नों की तुलना और उनकी लघुतम समहरवाली समान भिन्नों में परिवर्त्तन—$\frac{२}{५}$, $\frac{३}{५}$ और $\frac{४}{५}$ भिन्नों पर विचार करो ।

इनको देखते ही तुम कह सकते हो कि $\frac{४}{५}$ सबसे बड़ी और $\frac{२}{५}$ सबसे छोटी भिन्न है। यह बात भी स्पष्ट है कि पाँचवें भागों में ४ पाँचवाँ सबसे अधिक और २ पाँचवाँ सबसे कम है। इससे यह फल निकला कि जिन भिन्नों के हर बराबर हों उनमें सबसे बड़ी वह भिन्न होगी जिसका अंश सबसे बड़ा है और सबसे छोटी वह भिन्न होगी जिसका अंश सबसे छोटा है।

अब $\frac{३}{५}$, $\frac{७}{१०}$ और $\frac{५}{६}$ भिन्न पर विचार करो। ये वही भिन्नें हैं जो ऊपर के उदाहरण ३ में दी जा चुकी हैं। इन भिन्नों में से कौन-सी सबसे बड़ी और कौन-सी सबसे छोटी है यह बताना तुम्हारे लिए आसान नहीं है जब तक कि तुम अपनी पटरी में $\frac{३}{५}$ इच, $\frac{७}{१०}$ इंच और $\frac{५}{६}$ इंच को देख न लो, क्योंकि इस भिन्न से भिन्न भिन्न प्रकार के भाग (अंश) प्रकट होते हैं। यदि $\frac{२}{५}$, $\frac{३}{५}$ और $\frac{४}{५}$ की तरह एक ही प्रकार के भाग होते तो तुम आसानी से बता देते कि इनमें से कौन-सी भिन्न सबसे बड़ी और कौन सबसे छोटी है। इससे यह बात जानी जाती है कि यदि इन भिन्नों के भी हर एक समान हो जायँ तो सारी कठिनाई दूर हो जाय, अर्थात् उनका परिवर्तन समान भिन्नों में हो जाय और उनकी तुलना करने में कुछ भी कठिनाई न पड़े। इसलिए तुम इन भिन्नों को समान भिन्नों में बदलते जाओ और जब तक इनकी एक ही हरवाली समान भिन्न न मिल जाय तब तक क्रिया बंद मत करो। जैसे:—

$\frac{३}{५} = \frac{६}{१०} = \frac{९}{१५} = \frac{१२}{२०} = \frac{१५}{२५} = \frac{१८}{३०} = \frac{२१}{३५} = \frac{२४}{४०} = \frac{२७}{४५}$
$= \frac{३०}{५०} = \frac{३३}{५५} = \frac{३६}{६०} = \frac{३९}{६५} = \ldots$

$\frac{७}{१०} = \frac{१४}{२०} = \frac{२१}{३०} = \frac{२८}{४०} = \frac{३५}{५०} = \frac{४२}{६०} = \frac{४९}{७०} = \ldots$

और $\frac{५}{६} = \frac{१०}{१२} = \frac{१५}{१८} = \frac{२०}{२४} = \frac{२५}{३०} = \frac{३०}{३६} = \frac{३५}{४२} = \frac{४०}{४८} = \frac{४५}{५४}$
$= \frac{५०}{६०} = \frac{५५}{६६} = \ldots$

इन समान भिन्नों को ध्यान से देखने पर तुमको तुरंत मालूम हो जायगा कि इनमें दी हुई भिन्नों में से प्रत्येक की एक ऐसी समान भिन्न है जिसका हर ३० है और एक दूसरी समान भिन्न ऐसी है जिसका हर ६० है, जैसा कि हम नीचे लिख कर दिखलाते हैं :—

$\frac{३}{५} = \frac{१८}{३०} = \frac{३६}{६०}$ अर्थात् $\frac{१८ \times २}{३० \times २}$

$\frac{७}{१०} = \frac{२१}{३०} = \frac{४२}{६०}$ अर्थात् $\frac{२१ \times २}{३० \times २}$

$\frac{५}{६} = \frac{२५}{३०} = \frac{५०}{६०}$ अर्थात् $\frac{२५ \times २}{३० \times २}$

ऊपर की भिन्नों को, जिनके हर समान हैं, देखते ही तुम बता सकते हो कि $\frac{२५}{३०}$ या $\frac{५}{६}$ सबसे बडी और $\frac{१८}{३०}$ या $\frac{३}{५}$ सबसे छोटी भिन्न है। यही बात उन भिन्नों के देखने से भी जान पड़ती है जिनका हर ६० है। यदि इनके हर ९० अर्थात् ३० × ३, १२०

अर्थात् ३० × ४, १५० अर्थात् ३० × ५ इत्यादि हो तो भी यही फल निकलेगा। लेकिन, तुमको उन्हीं समान भिन्नों को लेने में आसानी है जिनके हर में इन संख्याओं में से सबसे छोटी संख्या अर्थात् ३० हो।

चूँकि ३०, ६०, ९०, १२०, १५०, आदि दी हुई भिन्नों की समान भिन्नों के हर हैं, इसलिए इन संख्याओं को समहर कहते हैं, और चूँकि इन सब समहरों में से ३० सबसे छोटा समहर है इसलिए इसको लघुतम समहर कहते हैं।

दी हुई भिन्नों के हरों से अर्थात् ५, १० और ६ से इन समहरों की अर्थात् ३०, ६०, १२०, १५० आदि से तुलना करने पर तुमको मालूम हो जायगा कि ये संख्यायें दी हुई भिन्नों के हरों में से प्रत्येक के अपवर्त्य हैं, अर्थात् इनके समापवर्त्त्य हैं और ३० इनका लघुतम समापवर्त्त्य है।

इन फलों से तुम अब भिन्नों की तुलना करने की निम्नलिखित रीति निकाल सकते हो :—

दी हुई भिन्नों के हरों का लघुतम समापवर्त्त्य निकाल कर इनका लघुतम समहर ज्ञात करो और इसको प्रत्येक भिन्न का हर बनाकर उस भिन्न को समान भिन्न में परिवर्तन करो, जैसा कि ऊपर के उदाहरण ३ में दिखाया गया है।

उदाहरण १—$\frac{८}{१५}$, $\frac{७}{१२}$, $\frac{११}{२०}$, और $\frac{१४}{२५}$ को ऐसी समान भिन्नों में लाओ जिनका लघुतम समहर हो, और फिर उनको मानानुसार क्रम से लिखो।

पहिले हम समान भिन्नों का लघुतम समहर निकालने के लिए दी हुई भिन्नों के हरों का अर्थात् १५,१२,२० और २५ का लघुतम समापवर्त्य निकालते हैं।

चूँकि १५ = ३ × ५,

१२ = ३ × २ × २,

२० = ५ × २ × २,

और २५ = ५ × ५

∴ इनका ल० स० अ० = २ × २ × ५ × ५ × ३ = ३००

∴ समान भिन्नों का लघुतम समहर भी ३०० हुआ। अब, चूँकि $\frac{८}{१५}$ के हर को ३०० करना है अर्थात् ३०० + १५ या २० से गुणा देना है, इसलिए उसके अंश अर्थात् ८ को भी २० से गुणा देना होगा, नहीं तो भिन्न के मान में अन्तर पड़ जायगा और समान भिन्न नहीं मिलेगी।

इस प्रकार, $\frac{८}{१५}$ की लघुतम समहर रखनेवाली समान भिन्न

$$= \frac{८ \times २०}{१५ \times २०} = \frac{१६०}{३००}$$

इसी प्रकार चूँकि ३०० + १२ = २५, ∴ $\frac{७}{१२}$ की लघुतम समहर रखनेवाली समान भिन्न

$$= \frac{७ \times २५}{१२ \times २५} = \frac{१७५}{३००}$$

चूँकि ३००० − २० = १५, ∴ $\frac{११}{२०}$ की लघुतम समहर रखनेवाली समान भिन्न

$$=\frac{११ \times १५}{२० \times १६}=\frac{१६५}{३२०}$$

और चूँकि ३००÷२५=१२ $\frac{१४}{२५}$ की लघुतम समहर रखनेवाली समान भिन्न

$$=\frac{१४ \times १२}{२५ \times १२}=\frac{१६८}{३००}$$

इस प्रकार दी हुई भिन्नों की लघुतम समहर रखनेवाली समान भिन्न क्रम से $\frac{१६०}{३००}$, $\frac{१७५}{३००}$, $\frac{१६५}{३००}$ और $\frac{१६८}{३००}$ हुई। इन समान भिन्नों की तुलना करने से हम देखते हैं कि इनको मानानुसार निम्नलिखित क्रम से लिख सकते हैं :—

$\frac{१७५}{३००}$, $\frac{१६८}{३००}$, $\frac{१६५}{३००}$ और $\frac{१६०}{३००}$,

या $\frac{७}{१२}$, $\frac{१४}{२५}$, $\frac{११}{२०}$, $\frac{८}{१५}$ ।

नोट—यदि दी हुई भिन्न संक्षेप हो सकती हों तो कर लो और तब ऊपर के उदाहरण की रीति से क्रिया करो, नहीं तो गुणा और भाग की क्रियायें बहुत बड़ी हो जायँगी।

अभ्यास—२७ (ज़बानी)

(१) $\frac{३}{८}$ और $\frac{७}{८}$ का समहर ज्ञात करो।

(२) $\frac{३}{४}$, $\frac{५}{६}$ और $\frac{७}{१२}$ को समहर करो।

(३) कौन-सी लम्बाई बड़ी है $\frac{७}{१०}$ फुट या $\frac{१५}{१८}$ फुट ?

(४) १ मील का $\frac{११}{१२}$ दूरी अधिक है या १ मील का $\frac{१४}{१५}$?

(५) $\frac{१३}{१४}$, $\frac{२७}{२८}$ और $\frac{६}{७}$ में से कौनसी सबसे बड़ी और कौन-सी सबसे छोटी है ?

(६) कौन-सा सबसे अधिक भारी है, $\frac{३}{८}$ मन या $\frac{९}{२०}$ मन या $\frac{२}{५}$ मन ?

(७) विश्वनाथ प्रतिदिन $\frac{१}{८}$ दिन सेाता है और उसका भाई $\frac{१}{३}$ दिन सेाता है, तेा इनमें कौन अधिक सेाता है ?

(८) $\frac{५}{७}$, $\frac{११}{१२}$ और $\frac{९}{१४}$ को ऐसी समान भिन्नों में बदलेा जिनके हर बराबर और कम से कम हों और बताओ इन भिन्नों में कौन सबसे बड़ी और कौन-सी सबसे छेाटी है।

(९) ऐसी समान भिन्नों में लाओ जिनके लघुतम समहर हो :—

(१) $\frac{२}{३}$, $\frac{७}{९}$, $\frac{५}{१२}$ (२) $\frac{१}{४}$, $\frac{७}{८}$, $\frac{५}{८}$ (३) $\frac{२}{५}$, $\frac{५}{१८}$ (४) $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{५}{८}$ (५) $\frac{७}{१२}$, $\frac{१३}{१८}$ (६) $\frac{७}{९}$, $\frac{५}{१८}$, $\frac{७}{१०}$ (७) $\frac{१}{५}$, $\frac{७}{८}$, $\frac{३}{१०}$ (८) $\frac{३}{४}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{७}{१०}$ (९) $\frac{५}{१०}$, $\frac{७}{१८}$ (१०) $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{५}$, $\frac{४}{९}$, $\frac{५}{६}$।

(१०) इन भिन्नों की तुलना करो और उनको क्रमानुसार लिखेा ताकि सबसे बड़ी भिन्नें सबसे पहिले हों :—

(१) $\frac{१}{२}$, $\frac{५}{१२}$, $\frac{११}{१८}$ (२) $\frac{३}{५}$, $\frac{७}{१०}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{५}{६}$ (३) $\frac{३}{४}$, $\frac{४}{५}$, $\frac{३}{८}$ (४) $\frac{२}{५}$, $\frac{३}{७}$, $\frac{१}{९}$, $\frac{५}{१६}$ (५) $\frac{५}{१३}$, $\frac{१७}{२८}$, $\frac{३}{४}$ (६) $\frac{७}{१०}$, $\frac{११}{१५}$, $\frac{२}{३}$ (७) $\frac{३}{४}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{७}{८}$ (८) $\frac{१}{५}$, $\frac{३}{१४}$ (९) $\frac{४}{९}$, $\frac{५}{१८}$ (१०) $\frac{४}{९}$, $\frac{७}{१०}$, $\frac{१}{२}$, $\frac{७}{१२}$।

अभ्यास—२८

निम्नलिखित भिन्नों की तुलना करो और उन्हे बढ़ते हुए क्रम से लिखो :—

(१) $\frac{३}{८}$, $\frac{१०}{२१}$, $\frac{१५}{२८}$ और $\frac{७}{१८}$ । (२) $\frac{२}{९}$, $\frac{५}{१८}$, $\frac{७}{२४}$ और $\frac{५}{१६}$ ।
(३) $\frac{२}{५}$, $\frac{७}{१५}$, $\frac{११}{२१}$ और $\frac{२}{३}$ । (४) $\frac{७}{१५}$, $\frac{२७}{४८}$, $\frac{७७}{९०}$ और $\frac{२५}{३६}$ ।

निम्नलिखित भिन्नों को समान भिन्नों मे बदलो जिनमे लघुतम समहर हो:—

(१) $\frac{७}{१५}$, $\frac{११}{२७}$, $\frac{१}{१२}$ और $\frac{१७}{३३}$ । (२) $\frac{३}{५}$, $\frac{७}{१५}$, $\frac{८}{२५}$ और $\frac{११}{३३}$ ।
(३) $\frac{७}{२४}$, $\frac{४}{१५}$, $\frac{८}{३५}$ और $\frac{५}{८}$ । (४) $\frac{८}{१५}$, $\frac{७}{२०}$, $\frac{५}{१६}$ और $\frac{११}{४८}$ ।
(५) $\frac{३१}{४२}$, $\frac{३३}{३५}$, $\frac{३५}{४०}$, $\frac{१६}{२८}$ और $\frac{४९}{५६}$ । (६) $\frac{५}{१२}$, $\frac{१३}{३०}$, $\frac{११}{१८}$, $\frac{१५}{२०}$ और $\frac{४}{१५}$ ।
(७) $\frac{२२}{६५}$, $\frac{४१}{५२}$, $\frac{३४}{९१}$ और $\frac{१६}{११७}$ । (८) $\frac{३३}{४४}$, $\frac{१५}{२२}$, $\frac{१९}{१२०}$, $\frac{१५}{६६}$ और $\frac{१७}{१२०}$ ।
(९) $\frac{१३}{१५}$, $\frac{११}{१६}$, $\frac{१३}{१८}$, $\frac{११}{२०}$, $\frac{१७}{२४}$, और $\frac{१६}{२७}$ ।
(१०) $\frac{५५}{७६}$, $\frac{६५}{९५}$, $\frac{१३१}{७२०}$, $\frac{१४१}{२१०}$, और $\frac{३५}{५०४}$ ।

निम्नलिखित भिन्नों की तुलना करो और उन्हे घटते हुए क्रम से लिखो :—

(१) $\frac{५}{९}$, $\frac{११}{१८}$ और $\frac{५०}{९९}$ (२) $\frac{७}{१५}$, $\frac{११}{२१}$ और $\frac{१८}{३५}$ ।
(३) $\frac{३१}{४०}$, $\frac{४७}{६०}$, $\frac{५१}{७२}$ और $\frac{७३}{९६}$ । (४) $\frac{१०}{२८}$, $\frac{२३}{४२}$, $\frac{२०}{९१}$ और $\frac{३५}{५२}$ ।

निम्नलिखित प्रश्नों में कौन-सी भिन्न सबसे बड़ी है :—
(१) ४/११ और ८/२१। (२) ५/१६ और १३/४०। (३) २३/२४, २६/२७ और २९/३०।
(४) १५/२८, ७/४० और १९/३८। (५) १७/४०, ७/२४ और १६/३५। (६) ५/४८,
७/७२ और ७/१२०।

निम्नलिखित प्रश्नों में कौनसी भिन्न सबसे छोटी है :—
(१) २४/२५ और ४४/४५। (२) १६/३५ और ४०/७७ (३) २१/५६, ३९/७२ और ३३/८०।
(४) ६/१४, २५/७७ और ३०/९१। (५) १७/२४, २७/८०, और ३५/५६। (६) २९/५०,
२९/८८ और २९/११०।

४—भिन्नों का जोड़ और बाक़ी

क्या तुम २ आनों में ३ पाई जोड़ सकते हो और बता सकते हो कि यह मिलकर ५ आने हुए या ५ पाइयाँ हुईं ? क्यों नहीं ? इसी प्रकार तुम ५ गज़ में से २ फ़ुट नहीं घटा सकते हो और उत्तर में न तो ३ फ़ुट कह सकते हो और न ३ गज़।

लेकिन, यदि हम आनों की पाइयाँ बना लें तो हम २ आनों मे ३ पाइयाँ मिला सकते हैं, और कह सकते हैं कि २४ पाइयाँ + ३ पाइयाँ = २७ पाइयाँ। इसी तरह गज़ों को फ़ुटों में बदल कर घटा भी सकते हैं और बता सकते हैं कि १५ फ़ुट − २ फ़ुट = १३ फ़ुट।

ऊपर के उदाहरणों से तुम समझ गये होगे कि केवल एक ही जाति की वस्तुएँ आपस में मिल सकती हैं और घट सकती हैं। यही बात भिन्नों में भी पाई जाती है।

यह बात तुम कह सकते हो कि ३ चौथाइयाँ + २ चौथाइयाँ = ५ चौथाइयाँ, या ३ चौथाइयाँ – २ चौथाइयाँ = १ चौथाई, परन्तु तुम ३ चौथाइयाँ ($\frac{३}{४}$) + २ तिहाइयाँ ($\frac{२}{३}$) मिल कर ५ चौथाइयाँ या ५ तिहाइयाँ नहीं कह सकते और घटाने की दशा में भी यह नहीं कह सकते कि १ चौथाई या १ तिहाई शेष रहो। इसका कारण यह है कि इनके हर भिन्न भिन्न हैं, और इसलिए ये भिन्नें एक जाति की नहीं हैं। और चूँकि एकजातीय वस्तुएँ जुड़ और घट सकती हैं इसलिए इनको जोड़ने या घटाने के पहिले समहर कर लेना चाहिए। लघुतम समहर लेने में अधिक सुगमता होती है, इसलिए इन भिन्नों को ऐसी समान भिन्नों में बदलना चाहिए जिनके हर समान और छोटे से छोटे हों। इस प्रकार जब भिन्ने एक जाति की हो जायँ तो फिर जोड़ना या घटाना बहुत आसान हो जाता है, क्योंकि एक ही जाति के भागों की क्रिया करने को रह जाती है, जैसा कि हमने नीचे दिखलाया है :—

उदाहरण १—$\frac{५}{७}$ इंच + $\frac{३}{७}$ इंच का मान बताओ।

$\frac{५}{७}$ इंच + $\frac{३}{७}$ इंच = ५ सातवें इंच + ३ सातवे इंच = ८ सातवे इंच = १$\frac{१}{७}$ इंच।

उदाहरण २—$\frac{५}{१४}$ गज़ + $\frac{१}{२}$ गज़ का मान बताओ।

यहाँ हमें पहले लघुतम समहर निकाल कर $\frac{५}{१४}$ गज़ और $\frac{१}{२}$ गज़ को समान भिन्नों में परिवर्त्तन करना चाहिए और फिर जोड़ना चाहिए। इस प्रकारः—

$\frac{५}{१४}$ गज + $\frac{१}{२}$ गज = $\frac{५}{१४}$ गज + $\frac{७}{१४}$ गज = $\frac{५+७}{१४}$ गज = $\frac{१२}{१४}$ गज = $\frac{६}{७}$ गज।

उदाहरण ३—$\frac{१}{५}$ और $\frac{१}{७}$ को जोड़ो।

इस प्रश्न में ५ और ७ का लघुतम समापवर्त्त्य ५ × ७ या ३५ हुआ। इसलिए $\frac{१}{५} = \frac{७}{३५}$ और $\frac{१}{७} = \frac{५}{३५}$

$\therefore \quad \frac{१}{५} + \frac{१}{७} = \frac{७}{३५} + \frac{५}{३५} = \frac{७+५}{३५} = \frac{१२}{३५}$

उदाहरण ४—$\frac{१}{६} + \frac{१}{२} + \frac{३}{१०}$ का मान निकालो।

चूँकि ६, २ और १० का लघुतम समापवर्त्त्य ३० है, इसलिए लघुतम समहर भी ३० हुआ।

इसलिए $\frac{१}{६} = \frac{५}{३०}$, $\frac{१}{२} = \frac{१५}{३०}$ और $\frac{३}{१०} = \frac{९}{३०}$

$\therefore \quad \frac{१}{६} + \frac{१}{२} + \frac{३}{१०} = \frac{५}{३०} + \frac{१५}{३०} + \frac{९}{३०} = \frac{५+१५+९}{३०}$

$= \frac{२९}{३०}$

उदाहरण ५—$२\frac{३}{१०}$ और $४\frac{५}{१२}$ को जोड़ो।

जिस प्रकार तुम सिक्कों और मन, सेर इत्यादि के जोड़ने मे भिन्न भिन्न राशियों, जैसे—पाइयों, आनों, रुपयों, तथा छटाँकों, सेरों और मनों को अलग अलग जोड़ते थे उसी प्रकार मिश्र संख्याओं के होने पर भिन्नों को भिन्नों के साथ और पूर्णांकों को पूर्णांकों के साथ जोड़ते हैं, जैसे:—

$२\frac{३}{१०} + ४\frac{५}{१२} = २ + ४ + \frac{३}{१०} + \frac{५}{१२}$

$= ६ + \frac{३}{१०} + \frac{५}{१२}$

अब चूँकि १० और १२ का लघुतम समापवर्त्त्य ६० है, $\therefore$ दोनों का लघुतम समहर भी ६० हुआ।

$\therefore$ ६ + $\frac{३}{१०}$ + $\frac{५}{१२}$ = ६ + $\frac{१८}{६०}$ + $\frac{२५}{६०}$ = ६$\frac{४३}{६०}$

मिश्र संख्याओं को विषम भिन्न बना कर जोड़ना या घटाना बड़ी भूल है। ऐसी दशा में भिन्न को भिन्न में और पूर्णांक को पूर्णांक में जोड़ना चाहिए, जैसा कि यहाँ दिखाया गया है।

उदाहरण ६—५$\frac{५}{८}$ + ३$\frac{४}{५}$ + $\frac{३}{४}$ का मान निकालो।

५$\frac{५}{८}$ + ३$\frac{४}{५}$ + $\frac{३}{४}$ = ५ + ३ + $\frac{५}{८}$ + $\frac{४}{५}$ + $\frac{३}{४}$

चूँकि ८, ५ और ४ का लघुतम समापवर्त्य ४० है, इसलिए लघुतम समहर भी ४० हुआ।

$\therefore$ ८ + $\frac{५}{८}$ + $\frac{४}{५}$ + $\frac{३}{४}$ = ८ + $\frac{२५}{४०}$ + $\frac{३२}{४०}$ + $\frac{३०}{४०}$

= ८ + $\frac{२५ + ३२ + ३०}{४०}$

= ८ + $\frac{८७}{४०}$

= ८ + २ $\frac{७}{४०}$

= १०$\frac{७}{४०}$

अभ्यास—२९ (ज़बानी)

जोड़ो :—

(१) $\frac{१}{२}$ मन और $\frac{१}{४}$ मन   (२) $\frac{१}{४}$ सेर और $\frac{७}{८}$ सेर।

(३) $\frac{३}{८}$ गज़ और $\frac{१}{२}$ गज़   (४) $\frac{३}{८}$ फ़ुट और $\frac{१}{८}$ फ़ुट।

(५) $\frac{५}{८}$ रुपया और $\frac{१}{६}$ रुपया (६) $\frac{२}{५}$ घंटा और $\frac{३}{४}$ घंटा

(७) $\frac{३}{४}$ दिन और $\frac{३}{८}$ दिन   (८) $\frac{४}{५}$ गज़ और $\frac{१}{१२}$ गज़।

(९) $\frac{३}{१५}$ मिनट और $\frac{७}{६}$ मिनट (१०) $\frac{५}{१६}$ सेकंड और $\frac{७}{१२}$ सेकंड

(११) $\frac{१}{६}$ और $\frac{३}{४}$ (१२) $\frac{१}{६}$ और $\frac{७}{८}$।

(१३) $\frac{१}{१२}$, $\frac{५}{१८}$ और $\frac{७}{२४}$ (१४) $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{३}$ और $\frac{३}{४}$

(१५) ४$\frac{३}{१०}$ और ५$\frac{४}{५}$ (१६) ४$\frac{१}{१२}$ और ६$\frac{१}{१८}$

(१७) २$\frac{७}{२०}$ और १$\frac{१}{१२}$ (१८) ३$\frac{१}{३}$ और २$\frac{१}{६}$

(१९) ४$\frac{१}{५}$, २$\frac{७}{१०}$ और १$\frac{१}{२}$

(२०) २$\frac{१}{२}$, ५$\frac{१}{१२}$ और ४$\frac{१}{४}$

(२१) $\frac{१}{८}$ रुपया + $\frac{१}{३}$ रुपया + $\frac{१}{४}$ रुपया + $\frac{१}{२४}$ रुपया में कितने रुपये हैं ?

(२२) कपड़े के ऐसे ३ टुकड़ों में कितने गज़ कपड़ा होगा जिनकी लम्बाइयाँ ७$\frac{१}{३}$, १०$\frac{३}{४}$ और १२$\frac{५}{६}$ गज़ हैं ?

(२३) एक मनुष्य ने अपनी सम्पत्ति तीन लड़कों में इस तरह बाँटी कि एक को कुल सम्पत्ति का $\frac{१}{१०}$, दूसरे को $\frac{३}{२०}$ और तीसरे को $\frac{४}{२५}$ दिया, तो उसने सम्पत्ति का कौन-सा भाग बाँट दिया ?

(२४) एक मनुष्य ने अपने धन का $\frac{२}{५}$ सोमवार को, $\frac{१}{३}$ मङ्गल को, $\frac{१}{६}$ बुध को और $\frac{१}{१०}$ बृहस्पति को खर्च किया, तो इन चार दिनों में उसने अपने धन का कौन-सा भाग खर्च किया ?

(२५) $\frac{७}{१०}$ मन, १$\frac{१}{२}$ मन और $\frac{१}{८}$ मन के पार्सलों का बोझ कुल कितना होगा ?

(२६) २ रु० ३$\frac{१}{६}$ आ०, ३ रु० ८$\frac{१}{४}$ आ० और ५ रु० ७$\frac{१}{३}$ आ० को जोड़ो।

(२७) $\frac{३}{४}$ गज़ + $\frac{३}{४}$ फ़ुट का मान बताओ।

(२८) $\frac{५}{१८}$ गज़ + $\frac{३}{१०}$ गज़ का मान निकालो।

(२९) $\frac{७}{८}$ दिन + $\frac{५}{६}$ दिन में कितने घटे हुए ?

(३०) लतीफ़ के पास ४$\frac{१}{३}$ आने हैं, उसके भाई के पास ३$\frac{१}{४}$ आने हैं और बहिन के पास २$\frac{१}{३}$ आने हैं। तो सबके पास कुल कितना धन है ?

अभ्यास ३०

जोड़ो :—

(१) $\frac{४}{५}$ इंच, $\frac{९}{१०}$ इंच और $\frac{११}{१२}$ इच (२) $\frac{७}{८}$ रु०, $\frac{११}{१२}$ रु० और $\frac{७}{१६}$ रु०।

(३) $\frac{१४}{१५}$ मील, $\frac{४}{१५}$ मील और $\frac{३४}{४५}$ मील। (४) $\frac{१३}{३०}$ घं०, $\frac{३४}{४५}$ घं०, और $\frac{१३}{२५}$ घंटा।

(५) $\frac{७}{८}$ से०, $\frac{२३}{२४}$ से० और $\frac{९}{१६}$ से०। (६) $\frac{३३}{२५}$ म०, $\frac{१७}{२०}$ म० और $\frac{१५}{१६}$ म०।

(७) ७$\frac{१}{२}$ रु०, ८$\frac{५}{६}$ रु०, ४$\frac{३}{८}$ रु० और ३$\frac{११}{१२}$ रु०।

(८) ३$\frac{५}{१२}$ रु०, २$\frac{१५}{२४}$ रु० और ४$\frac{१}{१६}$ रु०।

(९) ४$\frac{२}{१५}$, २$\frac{७}{२०}$, १$\frac{१}{१२}$ और ३$\frac{५}{१८}$। (१०) २१$\frac{४}{५}$, १८$\frac{२}{३}$, ४$\frac{१}{२}$ और ३६$\frac{५}{८}$।

मान बताओ :—

(११) ३$\frac{१}{६}$ घं० + $\frac{३}{२०}$ घं० + $\frac{५}{८}$ घं० + ४ $\frac{४}{१५}$ घं०। (१२) $\frac{११}{१६}$ सेकंड + $\frac{७}{८}$ से० + $\frac{३}{४}$ से० + $\frac{१७}{३२}$ से०।

(१३) ६$\frac{१}{१०}$ मि० + $\frac{४}{१५}$ मि० + ३$\frac{७}{२४}$ मि० + १$\frac{११}{३६}$ मि०।

(१४) ८$\frac{२}{[illegible]}$ गा० + ४ $\frac{५}{६}$ गा० + ५ $\frac{७}{३६}$ गा० + २ $\frac{११}{२४}$ गा०।

(१५) ५ १/८ म० + २ ११/१२० म० + ४ १/३२ म० + ७ ३/२५ म० ।

(१६) २ ३/७ सेर + ४ ५/१४ सेर + ३ ८/२१ सेर + ५ ७/२४ सेर

(१७) २७/१६ + ७१/३६ + ३२/४५ + ५७/३५ । (१८) ४१/६६ मिनट + २ ७/४० मिनट + ३ १७/२२० मिनट + ३५/४८ मिनट ।

(१९) १६५ + १७/१३२ + ४१/३०८ + ५७/३८५ । (२०) ४३/१४० + २५/१६८ + ३२/१७५ + ८६/१०५ ।

(२१) एक आदमी के चार बेटे थे, जिनमें से एक को उसने अपनी रियासत का १/१०, दूसरे को ३/१५, तीसरे को ३/२० और चौथे को ४/२५ दे दिया। उसने अपनी कुल रियासत का कौन-सा हिस्सा दे डाला।

(२२) चार पारसलों का वजन कितने मन है यदि उनके अलग अलग वजन ७/२० मन, २ ३/८ मन, १ ५/१६ मन और ३ ३/४ मन है ?

(२३) एक बैल का दाम ४५ ३/८ रु० है और गाडी का दाम उससे १४७ १५/३६ रु० अधिक है। बताओ गाड़ी का दाम क्या है।

(२४) एक खम्भे का २ १/१२ गज ज़मीन के भीतर और ५ ८/२७ गज बाहर है। बताओ खम्भा कितना लम्बा है।

(२५) एक आदमी का किसी महीने मे ११५ १५/३२ रु० खर्च हुआ और उसका दूसरे महीने में पहिले महीने के खर्च से ३४ ७/२४ रु० अधिक खर्चा हुआ। बताओ इन दोनों महीनो में उसका कुल कितना खर्च हुआ।

जब एक समभिन्न में से दूसरी समभिन्न घटानी होती है तो जोड़ की भाँति दोनों को लघुतम समहरवाली समान भिन्नों

मे बदल लेते हैं, फिर अंशों का अन्तर निकालकर उत्तर मे अश के स्थान पर रख देते हैं और हर के स्थान पर लघुतम समहर को रख देते हैं।

उदाहरण १— $\frac{११}{१६}$ मे मे $\frac{७}{१२}$ घटाओ

चूँकि १६ और १२ का लघुतम समापवर्त्य ४८ है,

लघुतम समहर = ४८

$\frac{११}{१६} - \frac{७}{१२} = \frac{३३}{४८} - \frac{२८}{४८} = \frac{३३-२८}{४८} = \frac{५}{४८}$ ।

जब मिश्रसंख्या मे से मिश्रसंख्या घटानी हो तो पूर्णांक में से पूर्णांक और भिन्न मे से भिन्न घटा देते हैं, जैसा निम्नलिखित उदाहरण मे दिखाया गया है:—

उदाहरण २ – $५\frac{५}{८}$ मे से $३\frac{१}{४}$ घटाओ।

$५\frac{५}{८} - ३\frac{१}{४} = २\frac{५}{८} - \frac{१}{४}$ (क्योंकि ५—३ = २)

$= २\frac{५}{८} - \frac{२}{८}$

$= २ + \frac{५}{८} - \frac{२}{८}$

$= २ + \frac{५-२}{८}$

$= २ + \frac{३}{८}$

$= २\frac{३}{८}$ ।

उदाहरण ३— $७\frac{५}{१२}$ में से $४\frac{७}{८}$ को घटाओ

$७\frac{५}{१२} - ४\frac{७}{८} = ७\frac{१०}{२४} - ४\frac{२१}{२४}$

यहाँ तुम देखते हो कि $\frac{१०}{२४}$ में से $\frac{२१}{२४}$ नहीं घट सकता क्योंकि $\frac{१०}{२४}$ भिन्न छोटी है। इसलिए यहाँ हम वही सिद्धान्त काम मे लायेगे जो पाइयों और आनों के घटाने मे ऐसी दशा होने पर काम मे

लाते थे, अर्थात् एक पूर्ण संख्या लेकर भिन्न में बदल देंगे और उसमें से बड़ी भिन्न को घटा देंगे। इस तरह :—

$$७\tfrac{५}{१२} - ४\tfrac{७}{८} = ७\tfrac{१०}{२४} - ४\tfrac{२१}{२४}$$

$= ३ + \frac{१०}{२४} - \frac{२१}{२४}$ (७ में से ४ घटाने पर)

$$= २ + १ + \tfrac{१०}{२४} - \tfrac{२१}{२४}$$

$$= २ + \tfrac{२४}{२४} - \tfrac{२१}{२४} + \tfrac{१०}{२४}$$

$$= २\tfrac{३}{२४} + \tfrac{१०}{२४}$$

$= २\frac{१३}{२४}$ ।

उदाहरण ४—४ में से $३\frac{३}{५}$ घटाओ।

$४ - ३\frac{३}{५} = १ - \frac{३}{५}$ (४ में से ३ घटाने पर)

$$= \tfrac{५}{५} - \tfrac{३}{५} = \tfrac{२}{५}$$

उदाहरण ५—$७\frac{५}{८} - २\frac{३}{४} + ३\frac{२}{३} - ४\frac{१}{६}$ का मान बताओ।

$$७\tfrac{५}{८} - २\tfrac{३}{४} + ३\tfrac{२}{३} - ४\tfrac{१}{६} = ७\tfrac{५}{८} + ३\tfrac{२}{३} - २\tfrac{३}{४} - ४\tfrac{१}{६}$$

$$= ७\tfrac{१५}{२४} + ३\tfrac{१६}{२४} - २\tfrac{१८}{२४} - ४\tfrac{४}{२४}$$

$$= १० + \tfrac{१५+१६}{२४} - ६ - \tfrac{१८}{२४} - \tfrac{४}{२४}$$

$$= १० - ६ + \tfrac{३१}{२४} - \tfrac{२२}{२४}$$

$$= ४ + \tfrac{९}{२४}$$

$$= ४\tfrac{९}{२४}$$

$$= ४\tfrac{३}{८}$$

उदाहरण ६—एक मनुष्य ने अपनी सम्पत्ति का $\frac{१}{२}$ अपने बड़े लड़के को और $\frac{१}{३}$ दूसरे को और शेष तीसरे को दिया। तो तीसरे लड़के को सम्पत्ति का कौन-सा भाग मिला ?

हमको कुल सम्पत्ति में से पहले और दूसरे लड़के के भागों का जोड़ घटाना चाहिए।

चूँकि $\frac{१}{२}+\frac{१}{३}=\frac{३}{६}+\frac{२}{६}=\frac{३+२}{६}=\frac{५}{६}$

तीसरे लडके को $१-\frac{५}{६}=\frac{१}{६}$ या कुल सम्पत्ति का $\frac{१}{६}$ भाग मिला।

अभ्यास ३१ (ज़बानी)

अन्तर निकालो :—

(१) $\frac{५}{६}$ फुट और $\frac{४}{५}$ फुट का (२) $\frac{३}{४}$ रुपया और $\frac{२}{३}$ रुपया का (३) $\frac{५}{८}$ मन और $\frac{१}{१२}$ मन का (४) $\frac{९}{१०}$ घंटे और $\frac{७}{१२}$ घंटे का (५) $\frac{९}{१४}$ इंच और $\frac{१}{७}$ इंच का (६) $\frac{१}{८}$ गज़ और $\frac{१}{९}$ गज़ का (७) $\frac{११}{१२}$ रुपया और $\frac{७}{१६}$ रुपया का (८) $५\frac{३}{७}$ रुपया और $३\frac{१}{८}$ रुपया का (९) $४\frac{३}{२०}$ मिनट और $९\frac{२}{१५}$ मिनट का (१०) $२\frac{२}{९}$ गज़ और $\frac{१}{६}$ गज़ का (११) $१७\frac{९}{१०}$ और $१३\frac{९}{२०}$ का (१२) $१८\frac{११}{१२}$ और $१८\frac{३}{४}$ का (१३) $२\frac{७}{२०}$ और $१\frac{११}{३०}$ का (१४) $\frac{५}{१२}$ और $६\frac{१}{२}$ का (१५) $२\frac{५}{१६}$ और $१\frac{१}{८}$ का (१६) $१\frac{११}{१२}$ और $\frac{१३}{१६}$ का (१७) $२\frac{३}{८}$ और $१\frac{५}{७}$ का (१८) ३ और $२\frac{३}{७}$ का (१९) ६ और $३\frac{४}{५}$ का (२०) १० और $६\frac{७}{१०}$ का।

(२१) $\frac{३}{५}$ में कौन-सी भिन्न जोड़ दे कि $\frac{३}{४}$ हो जाय ?

(२२) एक बनिये के पास $\frac{२}{३}$ मन घी है। उसने उसमे से $\frac{५}{८}$ मन बेंच दिया तो अब कितना घी बाक़ी है ?

(२३) $१\frac{३}{५}$ मन $\frac{७}{१०}$ मन से कितना भारी है ?

(२४) एक मील का १/८, एक मील के १/६ से कितना लम्बा है ?

(२५) वह कौन-सी भिन्न है जिसमें २ १/५ जोड़ने से ३ ५/६ बन जाय ?

(२६) २ ३/५ में से कौन-सी संख्या घटा दें कि १ १/४ शेष रहे ?

(२७) १५ २/३ गज़ लम्बे टुकड़े में से कितना काट लिया जाय कि ३ ५/८ बाक़ी बचे ?

(२८) यदि मैं अपने धन का ३/१० दान कर दूँ तो मेरे पास कौन-सा भाग शेष रहेगा ?

(२९) यदि मैं अपने रुपयों का १/५ ख़र्च कर दूँ और उनका १/४ नष्ट हो जाय तो अब मेरे पास कुल का कौन-सा भाग शेष रहेगा ?

(३०) एक घंटे के ११/१२ में से कितना निकाल दें कि आधा घंटा शेष रहे ?

अभ्यास—३२

घटाओ :—

(१) १३/९८ को ५१/८९ से। (२) १ ५/७ को १ ३/२८ से। (३) १३/३८ को २०/८७ से।

(४) ४५/११९ को ६१/८५ से। (५) १४/६५ को ३३/९१ से। (६) ३/८ को ३४/२८ से।

(७) ८ ५/३२ को ७ ३/८ से। (८) ५ ३५/३२ को ७ ११/२४ से।

अन्तर निकालो :—

(९) ५ ४/२७ रु० और २ १७/१८ रु० में।

(१०) ९ ३/३२ रु० और १२ १/४ रु० में।

(११) ८$_{१}\frac{४}{९}$ म० और ५$_{३}\frac{१}{९}$ म० में।

(१२) १$_{१}\frac{४}{८}$ फ़ी० और ४$_{१}\frac{५}{२}$ फ़ी० में।

(१३) ३$_{३}\frac{५}{३}$ मी० और २$\frac{१}{८}\frac{५}{८}$ मी० में।

(१४) ४$\frac{१}{१}\frac{३}{६}$ से० और १$\frac{१}{१}\frac{१}{२}$ से० में।

(१५) ३$_{३}\frac{५}{६}$ ग० और ५$\frac{१}{२}\frac{७}{४}$ ग० मे।

(१६) ४$_{२}\frac{३}{०}$ मि० में और २$_{१}\frac{२}{९}$ मि० में।

मान निकालो :—

(१७) ५$\frac{७}{९}\frac{१}{१}$ − ४$\frac{२}{३}\frac{३}{९}$। (१८) १०० − ८४$\frac{१}{३}\frac{७}{९}$।

(१९) ५० − १७$\frac{४}{५}\frac{१}{८}$। (२०) १७$_{१}\frac{३}{७}\frac{५}{६}$ − १६$_{१}\frac{२}{६}\frac{४}{९}$।

(२१) ३$\frac{२}{९}$ − २$\frac{५}{८}$ + ४$_{१}\frac{३}{०}$। (२२) ३$\frac{५}{९}$ + ६$_{१}\frac{७}{९}$ − ५$_{१}\frac{५}{८}$।

(२३) १२$_{२}\frac{३}{०}$ − ४$_{१}\frac{१}{९}$ − ७ + ३$_{२}\frac{५}{४}$।

(२४) ५$_{२}\frac{४}{१}$ − १$\frac{३}{४}$ + ४ − ४$_{७}\frac{५}{२}$ − १$\frac{१}{८}\frac{९}{१}$।

(२५) ६$\frac{१}{४}$ + १०$_{१}\frac{१}{०}$ − ३$\frac{५}{८}$ + १$_{१}\frac{३}{९}$। (२६) ५$_{३}\frac{२}{९}$ − ७$_{४}\frac{५}{२}$ + ४$\frac{१}{२}\frac{९}{९}$ +
३ = $_{१}\frac{४}{९}$।

(२७) ७$\frac{२}{३}$ + ५$\frac{३}{४}$ − ३$_{१}\frac{४}{९}$ − १$\frac{१}{२}\frac{७}{९}$ + $\frac{१}{२}\frac{१}{०}$। (२८) ३$\frac{१}{९}$ + १$\frac{४}{७}$ − ५$\frac{१}{२}$ +
२$_{३}\frac{६}{९}$ + १$\frac{२}{९}$।

(२९) ३$\frac{३}{४}$ रु० − २$\frac{७}{८}$ रु० + ४$\frac{१}{२}\frac{१}{४}$ रु० − ६$_{३}\frac{५}{२}$ रु० + १०$\frac{१}{६}\frac{३}{४}$ रु०।

(३०) ३$_{१}\frac{३}{०}$ म० − ४$_{१}\frac{५}{६}$ म० + २$\frac{१}{२}\frac{४}{९}$ म० + १$_{१}\frac{७}{२}$ म० − ३$\frac{१}{१}\frac{१}{९}$ म०।

(३१) एक मन के $\frac{१}{३}\frac{३}{०}$ में कितना जोड़ें कि १$\frac{१}{९}$ मन हो जाय?

(३२) ३$\frac{९}{१७}$ में से कितना घटाने से १$\frac{३}{३३}$ बाक़ी बचेगा ?

(३३) एक घटे के $\frac{११}{१२}$ से एक घंटे का कौन-सा हिस्सा घटाना चाहिए कि आधा घंटा बाक़ी बचे ?

(३४) २$\frac{५}{६}$ + $\frac{११}{१२}$ − १$\frac{१}{३}$ + $\frac{७}{१४}$ में कम से कम कितना जोड़ें कि योगफल पूर्णाङ्क बन जाय ?

(३५) १४$\frac{२}{३}$ गज़ और ३$\frac{१}{१६}$ गज़ का अन्तर, $\frac{५}{६}$ गज़ और ५$\frac{२}{३}$ गज़ के जोड़ से कितना बड़ा है ?

(३६) एक मनुष्य ने अपनी सम्पत्ति का $\frac{५}{८}$ अपने एक लड़के को और $\frac{७}{२४}$ दूसरे लड़के को दिया, तो उसके पास अब कुल का कौन-सा भाग शेष रहा ?

(३७) एक आदमी ने कुछ अंडों का $\frac{३}{८}$ बेच दिया और $\frac{१}{४}$ टूट गया, तो बताओ कुल का कौन-सा भाग शेष रहा।

(३८) एक आदमी ने अपने रुपये का $\frac{१}{४}$ अपने लड़के को, $\frac{१}{३}$ बड़ी लड़की को, $\frac{१}{८}$ छोटी लड़की को और शेष अपनी स्त्री को दिया। बताओ स्त्री को कौन-सा भाग मिला।

(३९) एक आदमी अपनी आमदनी का $\frac{१}{४}$ खाने-पीने मे खर्च करता है, $\frac{१}{३}$ मकान का किराया देता है, $\frac{१}{५}$ दान करता है और $\frac{१}{३}$ घर भेजता है। बताओ उसके पास आमदनी का कौन-सा हिस्सा बचेगा।

(४०) अगर मैं अपनी एक हफ़्ते की आमदनी का $\frac{३}{१४}$ सोमवार को, $\frac{१}{६}$ मङ्गलवार को और $\frac{५}{२८}$ बुधवार को ख़र्च करूँ तो मेरे पास क्या बाक़ी बचेगा ?

५—भिन्न का गुणा

अ—भिन्न में पूर्णांक संख्या से गुणा

उदाहरण १ -$\frac{3}{4}$ को ५ से गुणा करो।

जिस तरह ३ रु० × ५ का यह अर्थ है कि ३ रु० + ३ रु० + ३ रु + ३ रु० + ३ रु० = १५ रुपये, अर्थात ३ रुपये को ५ बार लेकर जोडा जाय, उसी तरह ३ चौथाइयाँ × ५ से यह आशय है कि ३ चौथाइयाँ + ३ चौथाइया + ३ चौथाइयाँ + ३ चौथाइया + ३ चौथाइयाँ = १५ चौथाइयाँ, अर्थात् $\frac{3}{4} \times ५ = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{१५}{४}$, यहाँ $\frac{3}{4}$ को ५ बार लेकर जोड लिया।

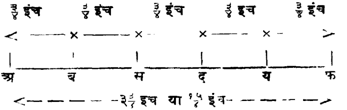
चूँकि सब अश एक समान हैं इसलिए हम कह सकते हैं कि :—

$$\frac{3}{4} \times ५ = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3 \times ५}{४}$$

$$= \frac{१५}{४}$$

$$= ३\frac{3}{4}$$

इस गुणनफल की सचाई तुम अपनी पटरी से भी जाँच सकते हो। $\frac{3}{4}$ इच लम्बी ५ रेखाये एक दूसरी के सिरे मिला कर लम्बाई मे रक्खो और कुल लम्बाई को नापो तो ३$\frac{3}{4}$ इच होगी, अर्थात् $\frac{3}{4} \times ५ = \frac{१५}{४} = \frac{३ \times ५}{४}$, जैसा कि आगे की आकृति में दिखाया गया है।



इसी तरह $\frac{५}{६} \times २ = \frac{५ \times २}{६} = \frac{१०}{६} = १\frac{४}{६} = १\frac{२}{३}$

अब कागज़ की एक पट्टी लो जो ५ इंच लम्बी और १ इंच चौड़ी हो। इसको मोड़ कर चार बराबर भाग करो और इनमें से तीन भाग लो तो तुम देखोगे कि इनकी लम्बाई $३\frac{३}{४}$ इंच या $\frac{१५}{४}$ इंच है। यहाँ पर चूँकि ५ इंच को ४ बराबर भागों में बाँटा है इसलिए इनमें से प्रत्येक भाग पाँच इंच का $\frac{१}{४}$ है और ३ भाग पाँच इंच के $\frac{३}{४}$ है। चूँकि पटरी से इनकी लम्बाई $\frac{१५}{४}$ इंच नाप ली गई है इससे तुमको मालूम हो गया होगा कि ५ का $\frac{३}{४} = \frac{१५}{४}$, और हम यह भी बता आये हैं कि $\frac{३}{४} + \frac{३}{४} + \frac{३}{४} + \frac{३}{४} + \frac{३}{४} = \frac{३}{४} \times ५ = \frac{१५}{४}$। अतः $\frac{३}{४} \times ५$ का वही अभिप्राय है जो ५ का $\frac{३}{४}$ का है। इसलिए:—

$$\frac{३}{४} \times ५ = ५ \text{ का } \frac{३}{४} = \frac{३ \times ५}{४} = \frac{१५}{४} = ३\frac{३}{४}$$

$$\text{इसी तरह } २ \text{ का } \frac{५}{६} = \frac{५}{६} \times २ = \frac{५ \times २}{६} = \frac{१०}{६} = १\frac{४}{६} = १\frac{२}{३}$$

ऐसे बहुत-से उदाहरणों से, जिनको अध्यापक जी श्यामपट पर लगा कर दिखलायेंगे और जिनकी सचाई की जाँच तुम

अपनी पटरी से भी कर लोगे, तुम यह फल आसानी से निकाल सकोगे कि जब भिन्नों में पूर्णाङ्क का गुणा देना हो तो भिन्न के अंश में पूर्णाङ्क का गुणा कर देते हैं, हर वही रहने देते हैं, और इस नई भिन्न को, यथासम्भव संक्षिप्त करके मिश्र संख्या बना लेते हैं।

उदाहरण २—$२\frac{२}{३}$ को ४ से गुणा दो।

जिस प्रकार रुपये, आने और पाई में गुणा देते समय प्रत्येक में गुणक से गुणा करते हैं और अन्त में सब गुणनफलों को जोड़ लेते हैं इसी तरह यहाँ भी ४ से पहले पूर्णाङ्क २ को गुणा करेंगे और फिर $\frac{२}{३}$ को और अन्त में इन दोनों गुणनफलों को जोड़ लेंगे। इस प्रकार :—

$$२\frac{२}{३} \times ४ = २ \times ४ + \frac{२}{३} \times ४ = ८ + \frac{२ \times ४}{३} = ८ \times \frac{८}{३} = ८ + २\frac{२}{३} = १०\frac{२}{३}$$

यदि $२\frac{२}{३}$ को विषम भिन्न बना कर तब ४ से गुणा करें तो भी वही गुणनफल आयेगा, जैसे:—

$$२\frac{२}{३} \times ४ = \frac{८}{३} \times ४ = \frac{८ \times ४}{३} = \frac{३२}{३} = १०\frac{२}{३}$$ ।

ब—भिन्न में भिन्न का गुणा—

उदाहरण ३—$\frac{३}{४}$ को $\frac{२}{३}$ से गुणा करो।

यह तो तुम समझ चुके हो कि ३ रुपये × ५ का यह अर्थ है कि ३ रुपये को ५ बार लेकर जोड़ें और $\frac{३}{४} \times ५$ का यह अर्थ है कि $\frac{३}{४}$ को ५ बार लेकर जोड़ें। अब देखना है कि $\frac{३}{४} \times \frac{२}{३}$ का क्या अर्थ है। स्पष्ट है कि इसका ऐसा अर्थ नहीं लगा सकते कि $\frac{३}{४}$ को

एक के $\frac{२}{३}$ बार लेकर जोड़ा जाय क्योंकि इसका कुछ अर्थ न निकलेगा। लेकिन, तुमने ऊपर के उदाहरण १ में देखा है कि $\frac{३}{४}\times५$ का अर्थ ५ का $\frac{३}{४}$ भी लिया गया है; इसलिए हम $\frac{३}{४}\times\frac{२}{३}$ का अर्थ $\frac{२}{३}$ का $\frac{३}{४}$ लेंगे।

$\frac{२}{३}$ का $\frac{३}{४}$ का मान निकालने के पहिले यह अच्छा होगा कि $\frac{१}{३}$ का $\frac{१}{४}$ का मान निकालें :—

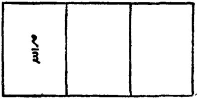
अपनी पटरी के उस किनारे को देखो जिसमें इंच के तिहाई, छठवें और बारहवें भाग किये गये हैं। इंच के तिहाई भाग को ४ बराबर भागों में बाँटा है, अर्थात् इन छोटे भागों में से प्रत्येक $\frac{१}{३}$ इंच का $\frac{१}{४}$ है। और इन छोटे भागों को गिनने से ज्ञात होता है कि यह गिनती में १२ हैं; इसलिए प्रत्येक भाग १ इंच का $\frac{१}{१२}$ है इससे प्रकट होता है कि $\frac{१}{३}$ इंच का $\frac{१}{४}=\frac{१}{१२}$ इंच $=\frac{१}{३\times४}$

अब हम $\frac{१}{३}$ फ़ुट का $\frac{१}{४}$ का मान निकालेंगे।

चूँकि, $\frac{१}{३}$ फ़ुट $=४$ इंच

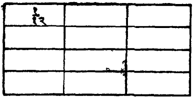
$\therefore \frac{१}{३}$ फ़ुट का $\frac{१}{४}=४$ इंच का $\frac{१}{४}=१$ इंच $=\frac{१}{१२}$ फ़ुट $=\frac{१}{३\times४}$ फ़ुट

एक आयताकार कागज़ की पट्टी लेकर मोड़ो और मोड़ कर तीन बराबर भाग करो, जैसा कि चित्र १ में दिखाया गया है। इन तीन भागों में से प्रत्येक भाग कुल पट्टी का $\frac{१}{३}$ है।



चित्र १

अब इस पूरी पट्टी को बारह बराबर भागों में मोड़ कर बाँटो, जैसा कि चित्र २ में दिखाया गया है। इन छोटे भागों में से प्रत्येक भाग कुल पट्टी का $\frac{१}{१२}$ भाग है। यदि तुम चित्र २ को ध्यानपूर्वक देखो तो



चित्र २

तुमको ज्ञात होगा कि इसका सबसे छोटा भाग अर्थात् $\frac{१}{१२}$ वास्तव में पूरी पट्टी के $\frac{१}{३}$ का $\frac{१}{४}$ है। इससे यह फल निकला कि $\frac{१}{३}$ का $\frac{१}{४} = \frac{१}{१२} = \frac{१}{३ \times ४}$

चित्र २ को देखकर तुम तुरन्त बता सकते हो कि $\frac{१}{३}$ का $\frac{२}{४} = \frac{२}{१२}$ या $\frac{२}{३ \times ४}$ और $\frac{२}{३}$ का $\frac{३}{४} = \frac{६}{१२}$ या $\frac{२ \times ३}{३ \times ४}$

तुम अपनी पटरी से देखो कि $\frac{२}{३}$ इंच का $\frac{३}{४}$ या $\frac{२}{३}$ फुट का $\frac{३}{४}$ कितना होता है। स्पष्ट है कि दोनों दशाओं में $\frac{२}{३}$ का $\frac{३}{४} = \frac{६}{१२}$ या $\frac{२ \times ३}{२ \times ४}$ होता है।

अब चित्र २ का ध्यान रखते हुए अपनी पटरी की सहायता से देखो कि $\frac{३}{४}$ का $\frac{२}{३}$ कितने के बराबर होता है। स्पष्ट है कि $\frac{६}{१२}$ के बराबर है। इससे यह फल निकलता है कि $\frac{२}{३}$ का $\frac{३}{४} = \frac{३}{४}$ का $\frac{२}{३}$ के है।

इस प्रकार $\frac{२}{३}$ का $\frac{३}{४} = \frac{३}{४}$ का $\frac{२}{३} = \frac{६}{१२} = \frac{३}{४} \times \frac{२}{३} = \frac{२}{३} \times \frac{३}{४}$

लेकिन, तुम पहिले ही समझ चुके हो कि $\frac{२}{३}$ का $\frac{३}{४}$ उतना ही होता है जितना कि $\frac{३}{४} \times \frac{२}{३}$ । इसलिए हम कह सकते हैं कि —

$$\frac{३}{४} \times \frac{२}{३} = \frac{२}{३} \text{ का } \frac{३}{४} = \frac{३ \times २}{४ \times ३} = \frac{६}{१२} = \frac{१}{२}$$

ऐसे बहुत-से उदाहरणों से, जो तुम्हारे अध्यापक जी श्यामपट पर लिखकर समझायगे और जिनको तुम अपनी पटरी से भी जाँच लोगे, यह रीति तुम आसानी से निकाल लोगे, कि जब एक भिन्न को दूसरी भिन्न से गुणा देना हो तो दोनों अंशों का परस्पर गुणा करके गुणन-फल को अंश के और दोनों के हरों का परस्पर गुणा करके गुणनफल को हर के स्थान पर लिखते हैं और इस प्रकार जो नई भिन्न बनती है उसका, यथासम्भव संक्षेप करके उत्तर लिखते हैं।

उदाहरण ४—$\frac{८}{९}$ को $\frac{३}{४}$ से गुणा करो।

$$\frac{८}{९} \times \frac{३}{४} = \frac{८ \times ३}{९ \times ४} = \frac{२४}{३६} = \frac{६}{९} = \frac{२}{३} \text{ उत्तर}$$

अब ८ को ३ से और ९ को ४ से गुणा देने और गुणनफल $\frac{२४}{३६}$ को संक्षेप करने के बदले यह अच्छा होगा कि अंश और हर दोनों को एक ही संख्या से भाग दे दिया जाय और फिर गुणनक्रिया की जाय, जैसे —

$\frac{८}{९} \times \frac{३}{४} = \frac{८ \times १}{\cancel{९} \times \cancel{४}}$ (अंश और हर में ३ का भाग देने से)

(~~९~~ के नीचे ३)

$= \frac{\cancel{८} \times १}{३ \times \cancel{४}}$ (~~८~~ के ऊपर २) „ „ ४ „

$= \frac{२}{३}$

इस प्रकार कुछ अभ्यास करने के अनन्तर ऊपर की हुई भाग की दोनों क्रियाएँ तुम एक साथ ही कर सकोगे, जैसा कि नीचे दिखाया गया है :—

$\frac{\cancel{८}}{\cancel{९}} \times \frac{\cancel{३}}{\cancel{४}} = \frac{२}{३}$ (~~८~~ के ऊपर २, ~~९~~ के नीचे ३)

इस प्रकार अंश और हर में एक ही संख्या से भाग देने को **काटना** कहते हैं।

उदाहरण ५—$\frac{५}{९}$ का $\frac{३}{१०}$ का मान बताओ।

$\frac{५}{९}$ का $\frac{३}{१०} = \frac{\cancel{५} \times \cancel{३}}{\cancel{९} \times \cancel{१०}} = \frac{१ \times १}{३ \times २} = \frac{१}{६}$ (~~९~~ के नीचे ३, ~~१०~~ के नीचे २)

या और संक्षेप करके $\frac{\cancel{५}}{\cancel{९}}$क $\frac{\cancel{३}}{\cancel{१०}} = \frac{१}{६}$ (~~९~~ के नीचे ३, ~~१०~~ के नीचे २)

इस उदाहरण से, तथा उदाहरण ३ से तुमको ज्ञात हुआ होगा कि किसी भिन्न को हम एक और भिन्न की भिन्न के रूप

में भी प्रकट कर सकते हैं। इस प्रकार भिन्न की भिन्न को प्रभाग-जाति भिन्न कहते हैं।

जैसे "$\frac{२}{३}$ का $\frac{३}{४}$ = $\frac{६}{१२}$" और "$\frac{५}{९}$ का $\frac{३}{१०}$ = $\frac{१५}{९०}$" प्रभागजाति भिन्न के उदाहरण हैं।

उदाहरण ६—२$\frac{२}{५}$ का $\frac{५}{६}$ का मान निकालो।

गुणा देने के पहिले मिश्रसंख्या को विषम भिन्न बना लेना चाहिए, जैसा नीचे किया है :—

२$\frac{२}{५}$ का $\frac{५}{६}$ = $\frac{१२}{५}$ का $\frac{५}{६}$ = २

उदाहरण ७—१$\frac{१}{३}$ को १$\frac{१}{५}$ से गुणा करो

$$१\frac{१}{३} \times १\frac{१}{५} = \frac{४}{३} \times \frac{६}{५} = \frac{८}{५} = १\frac{३}{५}$$

अभ्यास—३३ (ज़बानी)

मान निकालो :—

(१) $\frac{१}{३}$ इंच + $\frac{१}{३}$ इंच और $\frac{१}{३}$ इंच × २ का (२) $\frac{१}{४}$ इंच + $\frac{१}{४}$ इंच + $\frac{१}{४}$ इंच और $\frac{१}{४}$ इच × ३ का।

(३) $\frac{१}{७}$ + $\frac{१}{७}$ + $\frac{१}{७}$ + $\frac{१}{७}$ + $\frac{१}{७}$ और $\frac{१}{७}$ × ५ का।

(४) $\frac{४}{९}$ गज + $\frac{४}{९}$ गज + $\frac{४}{९}$ गज + $\frac{४}{९}$ गज और $\frac{४}{९}$ गज × ४ का।

(५) $\frac{३}{८}$ रु० × ५ का (६) $\frac{२}{५}$ मन × ८ का (७) $\frac{१}{१२}$ × १० का।

(८) $\frac{१}{८}$ मन × २ का (९) $\frac{३}{४}$ सेर × ८ का।

(१०) $\frac{७}{१६}$ सेर × ४ का (११) $\frac{५}{८}$ रु० × ८ का (१२) $\frac{७}{१२}$ फुट × १२ का

(१३) $\frac{४}{९}$ फुट × ९ का। (१४) $\frac{११}{१२}$ गज × ३ का।

(१५) $\frac{४}{१८}$ मन × ३ का।

(१६) ८ लड़कों में से प्रत्येक के पास $\frac{७}{१२}$ रुपया है तो सबके पास मिल कर कितना है ?

(१७) दो अलग अलग रीतियों से निकालो—जब कि १ सेर चीनी $\frac{३}{८}$ रु० को आती हो तो ७ सेर चीनी का क्या मूल्य होगा ?

(१८) गेहूँ का एक बोरा $\frac{५}{८}$ मन भारी है तो ऐसे ७ बोरों का बोझ क्या होगा ?

(१९) एक सेर घी का मूल्य $१\frac{१}{८}$ रुपया हो तो ३ सेर घी का मूल्य निकालो।

(२०) एक लड़के का क़दम $१\frac{५}{१२}$ फ़ुट है तो २४ क़दम चलने में वह कितनी दूर जायगा ?

अभ्यास—३४

(१) एक थान कपड़े की लम्बाई $२०\frac{३}{४}$ गज़ है तो वैसे ही १५ थानों की लम्बाई कितनी होगी ?

(२) यदि मैं प्रत्येक लड़के को $\frac{३}{५}$ अमरूद दूँ तो जिस पाठशाला में ६० लड़के हों, वहाँ कितने अमरूदों की आवश्यकता पड़ेगी ?

(३) तुम्हारे पिता जी के पास थैली में कुछ रुपया था, उसका $\frac{३}{४}$ उन्होंने निकाला और उसका $\frac{१}{३}$ खर्च कर दिया, तो उन्होंने अपने धन का कौन-सा भाग खर्च किया ?

(४) ४${\frac{१}{३}}$ आने प्रतिगज के भाव की ७${\frac{१}{२}}$ गज़ छींट का क्या मूल्य होगा ?

(५) २${\frac{१}{२}}$ मील प्रतिघंटे की चाल से तुम १${\frac{१}{५}}$ घंटे में कितनी दूर चलोगे ?

(६) यदि एक पुस्तक १${\frac{३}{४}}$ इंच मोटी हो तो उसी तरह की १६ पुस्तकों की मोटाई, एक दूसरे पर रखने से कितनी होगी ?

(७) एक लड़के ने अपने धन का ${\frac{१}{५}}$ भाग खो दिया, जो शेष रहा उसका ${\frac{५}{६}}$ खर्च कर दिया तो कुल धन का कौन-सा भाग उसने खर्च किया ?

(८) गुरुदत्त के पास १ रुपये का ${\frac{५}{८}}$ है। उसने इसका ${\frac{२}{५}}$ एक भिखारी को दे दिया तो बताओ रुपये का कौन-सा भाग उसने दिया।

(९) तुम्हारे पिता ज़मीन के एक टुकड़े के ${\frac{५}{९}}$ के अधिकारी हैं। उन्होंने अपने भाग का ${\frac{३}{४}}$ बेंच डाला, तो उन्होंने कुल ज़मीन की कौन-सी भिन्न बेच डाली ?

(१०) वार्षिक परीक्षा में किसी श्रेणी के ${\frac{१५}{१६}}$ लड़के उत्तीर्ण हुए और जितने उत्तीर्ण हुए उनका ${\frac{१}{५}}$ भाग ने पुरस्कार पाया। तो पूरी श्रेणी के लड़कों की कौन-सी भिन्न ने पुरस्कार पाया ?

(११) यदि तुम्हारे एक अचकन के बनाने में ३${\frac{५}{६}}$ गज़ कपड़ा लगता हो तो ऐसी ६ अचकनों के बनाने मे कितना कपड़ा लगेगा ?

(१२) २$\frac{२}{३}$ गज के $\frac{३}{८}$ का मान निकालो।

(१३) तुम्हारे पिता ने एक महीने के ख़र्च के लिए ३$\frac{३}{४}$ मन चावल मोल लिया। महीने के अंत में यह ज्ञात हुआ कि कुल का $\frac{१}{८}$ मन चावल ख़र्च हुआ, तो कितना चावल ख़र्च हुआ ?

(१४) एक पानी का भरा हुआ घड़ा २$\frac{४}{५}$ मन है और ख़ाली घड़े की तोल कुल भरे हुए घड़े का $\frac{३}{७}$ है। तो ख़ाली घड़ा कितना भारी है ?

(१५) रहीम प्रतिदिन घर और पाठशाला दोनों में कुल ६$\frac{३}{५}$ घटे पढ़ता है। यदि वह इस समय का $\frac{२}{११}$ घर पर पढता हो तो पाठशाला में कितने समय तक पढ़ता होगा ?

(१६) १०$\frac{५}{८}$ रुपये प्रतिमन के भाव से २४ मन चावल का मूल्य निकालो।

(१७) एक रेलगाड़ी एक घंटे मे २५$\frac{७}{८}$ मील चलती है। तो बताओ ३$\frac{२}{३}$ घंटे में कितनी दूर चलेगी।

(१८) साबुन का एक टुकड़ा २$\frac{३}{५}$ छटाँक भारी हो तो ऐसे ही ८१$\frac{२}{३}$ टुकड़ों का बोझ निकालो।

(१९) मैं १००० आदमियों में कुछ अनाज इस तरह बाँटना चाहता हूँ कि प्रत्येक को मन का बारहवाँ भाग मिले। बताओ कितना अनाज देना चाहिए।

(२०) यदि एक बनिया एक महीने में २५$\frac{३}{४}$ मन आटा बेचता है तो ३$\frac{३}{५}$ महीने में कितना आटा बेचेगा ?

गुणा करो :—

(२१) $\frac{१३}{२०}$ को ३२ से। (२२) $६\frac{३}{८}$ को २६ से।

(२३) $३\frac{३}{४}$ को $२\frac{२}{३}$ से।

(२४) $५\frac{३}{५}$ को $७\frac{१}{७}$ से। (२५) $४\frac{२}{३}$ को $\frac{६}{७}$ से।

(२६) $१\frac{५}{१२}$ को $\frac{२}{३३}$ से।

(२७) $१४\frac{३}{५}$ को $७\frac{१}{१२}$ से। (२८) $१३\frac{४}{१७}$ को $४\frac{८}{१५}$ से।

(२९) $\frac{६९}{१२८}$ को १६० से।

(३०) $११\frac{३}{७}$ को $३\frac{३}{२०}$ से। (३१) $१७\frac{१}{७}$ को $२\frac{३}{२०}$ से।

(३२) $७\frac{४}{९}$ को $२\frac{२}{६३}$ से। (३३) $१९\frac{३}{७}$ को $२\frac{१}{१७}$ से।

(३४) $३\frac{२}{७}+७\frac{३}{५}$ को $४\frac{१}{३}-२\frac{१}{९}$ से।

(३५) $३\frac{३}{४}+२\frac{३}{८}$ को $६\frac{१}{३}-\frac{४}{१७}$ से।

निम्नलिखित प्रभाग जाति भिन्नों के मान निकालो :—

(३६) $७\frac{२}{९}$ का $२\frac{३}{५}$। (३७) $\frac{१४}{२७}$ का $\frac{१२}{३५}$।

(३८) $\frac{१४}{४५}$ का $\frac{१}{३}$ का $२\frac{३}{८}$। (३९) $१२\frac{१}{२}$ का $\frac{१}{३}$ का $७\frac{१}{३}$।

(४०) $२\frac{६}{३७}$ का $\frac{७}{१२}$ का १५ $\frac{६}{७}$ का $\frac{४}{९}$।

(४१) $\frac{३}{५}$ का $\frac{५}{७}-\frac{१}{३}$ का $\frac{२}{९}+\frac{१}{७}$ का $\frac{१}{२}+\frac{३}{८}$।

(४२) $\frac{१}{३}$ का $\frac{२}{५}+\frac{७}{१५}-\frac{१}{७}$ का $\frac{२१}{२४}+\frac{३}{५}$ का $\frac{५}{६}$।

(४३) $\frac{३}{४}$ का $\frac{२}{३}+\frac{७}{१२}$ का $\frac{२}{३}+\frac{१}{४}$ का $\frac{५}{६}$।

(४४) $\frac{१}{६}$ का $\frac{३}{७}-\frac{३}{१४}$ का $\frac{१}{३}+\frac{२}{५}$ का $\frac{५}{७}-\frac{३}{१४}$ का $\frac{१}{२}$।

(४५) $\frac{१२}{६}$ का $\frac{३}{११}+\frac{५}{७}$ का $\frac{२१}{२५}-१\frac{१}{४}$ का $\frac{१}{८}-\frac{१}{५}$ का $\frac{५}{८}$।

(४६) $\frac{४}{१३}\times\frac{४}{९}\times\frac{२६}{२५}\times\frac{७५}{६४}$।

(४७) $\frac{४१}{१३३} \times \frac{७६}{७८} \times \frac{३६}{१८} \times ६\frac{३}{४}$ ।

(४८) $\frac{१३}{३८} \times \frac{५७}{२८} \times \frac{७}{८८} \times \frac{१६}{३६}$ ।

(४९) $\frac{१३३}{७००} \times \frac{७}{४५} \times \frac{१०}{१७०} \times \frac{३४}{४}$ ।

(५०) $\frac{५}{२३} \times \frac{११}{१८} \times \frac{३६}{१६} \times \frac{१७}{१९} \times १\frac{१}{१४}$ ।

६—भिन्न का भाग

अ—भिन्न को पूर्णांक संख्या से भाग देना

जब हम कहते हैं कि ६ को ३ से भाग दो तो इसका यह अर्थ है कि ६ को ३ बराबर भागों में बाँटो और बताओ कि प्रत्येक भाग कितना है, या ६ में से ३ कितनी बार घट सकता है या इसमे कितनी बार सम्मिलित है। पहिले अर्थ के लिए ऐसा उदाहरण होगा कि यदि तुम्हारे पास ६ आने हों और इनको तुम ३ भिखारियो मे बाँटना चाहो तो प्रत्येक को क्या मिलेगा ? स्पष्ट है कि ६ आने – ३ = २ आने उत्तर। लेकिन दूसरे अर्थ के लिए ऐसा उदाहरण लेना पडेगा कि ६ आने में स तीन तीन आने मै कितने भिखारियों को दे सकता हूँ ? ६ आने + ३ आने = २ उत्तर। पूर्णाङ्क सख्या मे पूर्णाङ्क का भाग देने स ये भिन्न भिन्न अर्थ निकलते हैं।

अब देखें कि ये दोनों अर्थ भिन्न को पूर्णाङ्क से भाग देने में कहाँ तक लग सकते हैं।

उदाहरण १—$\frac{६}{७}$ को ३ से भाग दो।

$\frac{६}{७}$ को ३ से भाग देने का यह अर्थ है कि ६ सातवें भागों को ३ बराबर भागों में बाँटें और इनमें से एक भाग का मान बतावें, अर्थात् $\frac{६}{४}$ का तिहाई भाग कितना होता है यह ज्ञात करें। इसलिए $\frac{६}{७}$ ÷ ३ का या तो यह अर्थ है कि ६ सातवें ÷ ३ या $\frac{६}{७}$ का $\frac{१}{३}$, इसलिए $\frac{६}{७}$ ÷ ३ = ६ सातवें ÷ ३ = २ सातवें = $\frac{२}{७}$ या $\frac{६ ÷ ३}{७}$; अथवा $\frac{६}{७}$ ÷ ३ = $\frac{६}{७}$ का $\frac{१}{३}$ = $\frac{६}{७}$ × $\frac{१}{३}$ = $\frac{२}{७}$।

यदि तुम इस उदाहरण में भाग देने का दूसरा अर्थ लो, अर्थात् $\frac{६}{७}$ ÷ ३ का यह अभिप्राय लो कि $\frac{६}{७}$ में ३ कितनी बार सम्मिलित है, तो इससे कुछ अर्थ न निकलेगा।

उदाहरण २—$\frac{७}{९}$ को ४ से भाग दो।

$\frac{७}{९}$ − ४ = ७ नवें − ४ या $\frac{१}{९}$ का $\frac{१}{४}$।

चूँकि ७ में ४ का पूरा पूरा भाग नहीं लग सकता, इसलिए $\frac{७}{९}$ ÷ ४ का हम यही अर्थ लेंगे कि $\frac{७}{९}$ का $\frac{१}{४}$ क्या हुआ।

इसलिए $\frac{७}{९}$ ÷ ४ = $\frac{७}{९}$ का $\frac{१}{४}$ = $\frac{७}{३६}$

इस प्रकार के कई एक उदाहरण लगाने के अनन्तर तुम यह रीति निकाल सकोगे कि जब किसी भिन्न में पूर्णांक का भाग देना हो तो या तो उस भिन्न के अंश में उसका भाग देते हैं अथवा उसके हर के साथ गुणा कर देते हैं।

ब—भिन्न को भिन्न से भाग देना

उदाहरण ३—$\frac{5}{6}$ को $\frac{1}{3}$ से भाग दो।

$\frac{5}{6} \div \frac{1}{3}$ से यह अर्थ नहीं निकाल सकते, जैसा कि उदाहरण १ में निकाला था कि $\frac{5}{6}$ को $\frac{1}{3}$ बराबर बराबर भागों में बाँटो और एक भाग का मान बताओ, क्योंकि ऐसी क्रिया का कोई अर्थ नहीं निकलता है। इसलिए भिन्न में भिन्न का भाग देने में हम दूसरा अर्थ लेते हैं, अर्थात् $\frac{5}{6} \div \frac{1}{3}$ का यह अर्थ है कि $\frac{5}{6}$ में $\frac{1}{3}$ कितनी बार सम्मिलित है, जैसे ५ रुपये ÷ २ आने का यह अर्थ है कि ५ रुपये में २ आने कितनी बार सम्मिलित है।

इस बात के जानने के लिए कि ५ रुपये में २ आने कितनी बार सम्मिलित है हम ५ रुपये को २ आने से भाग देते हैं या ५ रुपये ÷ २ आने का मान निकालते हैं।

अब तुम $\frac{\text{५ रुपये}}{\text{२ आने}}$ का मान निकाल तो वही उत्तर आयेगा जो ५ रुपये ÷ २ आने से आता है। इसलिए हम कह सकते हैं कि :—

$$\text{५ रुपये} \div \text{२ आने} = \frac{\text{५ रुपये}}{\text{२ आने}}।$$

५ रुपये में दो आने का भाग हम तब दे सकते हैं जब कि ये दोनों एक जाति के कर लिये जायँ, जैसा कि मिश्र भाग में तुमने सिक्कों, तोलों और लम्बाइयों के भाग में किया था। इसलिए :—

$$५ \text{ रुपये} \div २ \text{ आने} = \frac{५ \text{ रुपये}}{२ \text{ आने}} = \frac{८० \text{ आने}}{२ \text{ आने}} = ४० \text{ ।}$$

जिस तरह तुमने यहाँ ५ रुपये और २ आने को एक जाति का बना लिया है इसी तरह $\frac{५}{६}$ और $\frac{३}{३}$ को भी एक ही प्रकार की ऐसी समान भिन्नों में बदल लेना चाहिए जिनके हर एक समान हों, जैसे १८ जो कि ६ और ३ दोनों हरों के गुणनफल के बराबर है।

$$\text{अब चूँकि } \frac{५}{६} = \frac{५ \times ३}{६ \times ३} \text{ और } \frac{२}{३} = \frac{२ \times ६}{३ \times ६}$$

$$\therefore \frac{५}{६} \div \frac{२}{३} = \frac{५ \times ३}{६ \times ३} \div \frac{२ \times ६}{३ \times ६} = \frac{५ \times ३}{१८} \div \frac{२ \times ६}{१८}$$

$$= ५ \times ३ \text{ अठारहवें} \div २ \times ६ \text{ अठारहवें}$$

$$= \frac{५ \times ३ \text{ अठारहवें}}{२ \times ६ \text{ अठारहवें}}$$

$$= \frac{५ \times ३}{२ \times ६}$$

$$= \frac{५}{४}$$

$$= १\frac{१}{४}$$

उदाहरण ४—$\frac{२}{३}$ को $\frac{४}{९}$ से भाग दो।

$\frac{२}{३}$ और $\frac{४}{९}$ को ऐसी समान भिन्नों में, जिनके हर समान हों लाने से :—

$$\frac{२}{३} = \frac{२ \times ९}{३ \times ९} \text{ और } \frac{४}{९} = \frac{४ \times ३}{९ \times ३}$$

$$\therefore \quad \frac{२}{३} \div \frac{४}{९} = \frac{२ \times ९}{३ \times ९} \div \frac{४ \times ३}{९ \times ३} = \frac{२ \times ९}{२७} \div \frac{४ \times ३}{२७}$$

$$= २ \times ९ \text{ सत्ताइसवें} \div ४ \times ३ \text{ सत्ताइसवें}$$

$$= \frac{२ \times ९ \text{ सत्ताइसवें}}{४ \times ३ \text{ सत्ताइसवें}}$$

$$= \frac{\overset{३}{\cancel{२}} \times \cancel{९}}{\underset{२}{\cancel{४}} \times \cancel{३}}$$

$$= \frac{३}{२}$$

$$= १\frac{१}{२}$$

उदाहरण ५—$\frac{३}{८}$ को $\frac{९}{२०}$ से भाग दो।

पहिले हम $\frac{३}{८}$ और $\frac{९}{२०}$ को समहर रखनेवाली समान भिन्नों में लाते हैं, जैसा कि नीचे दिखाया गया है :—

$$\frac{३}{८} = \frac{३ \times ५}{८ \times ५} = \frac{१५}{४०}$$

$$\text{और } \frac{९}{२०} = \frac{९ \times २}{२० \times २} = \frac{१८}{४०}$$

$$\therefore \frac{३}{८} \div \frac{९}{२०} = \frac{१५}{४०} \div \frac{१८}{४०}$$

चूँकि, यहाँ भाजक $\frac{१८}{४०}$ अर्थात् $\frac{९}{२०}$, भाज्य $\frac{१५}{४०}$ अर्थात् $\frac{३}{८}$ से बड़ा है, इसलिए हम ऊपर के उदाहरण ३ और ४ की तरह यहाँ यह अर्थ नहीं लगा सकते हैं कि $\frac{३}{८}$ में इससे एक बड़ी राशि $\frac{९}{२०}$ कितनी बार शामिल है। इस प्रकार, यह स्पष्ट है कि भिन्न में भिन्न

से भाग देने की क्रिया का वह अर्थ हम इस उदाहरण में नहीं ले सकते हैं जो कि हमने ऊपर के उदाहरण ३ और ४ में लिया था। अतः अब हमें यह देखना है कि इस उदाहरण में और भाग के ऐसे ही दूसरे उदाहरणों में भाग के चिह्न का क्या अर्थ लिया जा सकता है।

चूँकि, भाग के ऐसे प्रश्नों में, जिनमें कुछ बाक़ी नहीं बचता है तुम देख चुके हो कि,

भाज्य = भाजक × भजनफल,

इसलिए हम यह कह सकते हैं कि भजनफल वह संख्या है जिससे भाजक को गुणा देने से गुणनफल भाज्य के बराबर होता है। अतः भजनफल निकालने की अर्थात् भाग की क्रिया का तीसरा अर्थ यह हुआ कि हमको एक ऐसी संख्या निकालनी है जिससे भाजक का गुणा देने से भाज्य गुणनफल हो जाय। चूँकि भाग की क्रिया का यह अर्थ भाज्य से भाजक के छोटे या बड़े होने पर निर्भर नहीं है इसलिए इस प्रश्न में अर्थात उदाहरण ५ में भाग की क्रिया का हम यह अर्थ लगाते हैं कि "$\frac{१०}{२०}$ को किस भिन्न से गुणा दें कि गुणनफल $\frac{३}{२}$ हो जाय।"

चूँकि $\frac{१०}{२०}$ को $\frac{२०}{१०}$ से गुणा देने पर गुणनफल १ आता है और इस गुणनफल को $\frac{३}{२}$ से गुणा देने पर $\frac{३}{२}$ गुणनफल प्राप्त होता है, इसलिए स्पष्ट है कि $\frac{३}{२}$ गुणनफल प्राप्त होने के लिए $\frac{१०}{२०}$ को $\frac{३}{२}$ और $\frac{२०}{१०}$ से लगातार गुणनफल करना होता है। अर्थात् भजनफल $\frac{३}{२}$ और $\frac{२०}{१०}$ का गुणनफल हुआ।

इस प्रकार $\frac{३}{८} \div \frac{९}{२०} = \frac{\cancel{३}}{\cancel{८}_{२}} \times \frac{\cancel{२०}^{५}}{\cancel{९}_{३}} = \frac{५}{६}$

उदाहरण ६—$\frac{२}{९} \div \frac{११}{२४}$ का मान निकालो।

समहर रखनेवाली समान भिन्नों में लाने पर यह मालूम हुआ कि :—

$$\frac{२}{९} = \frac{२ \times ८}{९ \times ८} = \frac{१६}{७२} \text{ और } \frac{११}{२४} = \frac{११ \times ३}{२४ \times ३} = \frac{३३}{७२}$$

चूँकि, यहाँ भाजक $\frac{११}{२४}$ अर्थात् $\frac{३३}{७२}$, भाज्य $\frac{२}{९}$ अर्थात् $\frac{१६}{७२}$ से बड़ा है इसलिए यहाँ भी भाग की क्रिया का हमें वही अर्थ लेना है जो उदाहरण ५ में लिया था, अर्थात् एक ऐसी संख्या मालूम करनी है जिससे $\frac{११}{२४}$ को गुणा देने पर गुणनफल $\frac{२}{९}$ हो जाय।

चूँकि $\frac{११}{२४}$ को $\frac{२४}{११}$ से गुणा करने पर गुणनफल १ आता है और इसमें $\frac{२}{९}$ का गुणा देने पर गुणनफल $\frac{२}{९}$ होता है इसलिए इष्ट भजनफल $\frac{२}{९}$ और $\frac{२४}{११}$ का गुणनफल है। इस प्रकार :—

$$\frac{२}{९} \div \frac{११}{२४} = \frac{२}{\cancel{९}_{३}} \times \frac{\cancel{२४}^{८}}{११} = \frac{१६}{३३}$$

ऊपर के इन सब उदाहरणों के फलों को अब निम्नलिखित रूप से एक दूसरे के नीचे लिखो :—

$\frac{६}{७} \div ३ = \frac{६}{७} \times \frac{१}{३}$

$\frac{७}{९} \div ४ = \frac{७}{९} \times \frac{१}{४}$

$\frac{५}{६} \div \frac{३}{२} = \frac{५ \times २}{३ \times ६}$ या $\frac{५ \times २}{६ \times ३}$ या $\frac{५}{६} \times \frac{२}{३}$

$\frac{२}{३} \div \frac{४}{९} = \frac{२ \times ९}{४ \times ३}$ या $\frac{२ \times ९}{३ \times ४}$ या $\frac{२}{३} \times \frac{९}{४}$

$\frac{३}{८} \div \frac{१०}{२१} = \frac{२१}{१०} \times \frac{३}{८}$ या $\frac{३}{८} \times \frac{२१}{१०}$

$\frac{३}{९} \div \frac{११}{२४} = \frac{२४}{११} \times \frac{३}{९}$ या $\frac{३}{९} \times \frac{२४}{११}$

ऊपर के उदाहरणों को ध्यानपूर्वक देखने से तुम यह रीति आसानी से निकाल सकते हो कि किसी दी हुई भिन्न में चाहे पूर्णाङ्क का भाग देना हो चाहे भिन्न का, प्रत्येक दशा में भाजक को उलट कर अर्थात् भाजक की विलोम भिन्न से दी हुई भिन्न को गुणा कर देते हैं।

उदाहरण ७—$४\frac{१}{५}$ को $\frac{३}{१०}$ से भाग दो।

यहाँ भी गुणा की भाँति मिश्रसंख्या को विषम भिन्न बना कर भाग देंगे, इस तरह :—

$$४\frac{१}{५} \div \frac{३}{१०} = \frac{२१}{५} \div \frac{३}{१०} = \frac{\overset{७}{\cancel{२१}}}{\cancel{५}} \times \frac{\overset{२}{\cancel{१०}}}{\cancel{३}} = १४$$

उदाहरण ८—$५\frac{१}{३}$ को $३\frac{१}{५}$ से भाग दो।

$५\frac{१}{३} \div ३\frac{१}{५} = \frac{१६}{३} \div \frac{१६}{५} = \frac{१६}{३} \times \frac{५}{१६} = \frac{५}{३} = १\frac{२}{३}$

अभ्यास—३५ (ज़बानी)

मान निकालो :—

(१) $\frac{५}{६}$ इंच − ५ का (२) $\frac{३}{५}$ फ़ुट − २ का (३) $\frac{३}{४}$ रुपया − ३ का
(४) ९ आ० − $\frac{३}{८}$ का (५) ४ सेर − $\frac{४}{८}$ का (६) २$\frac{१}{२}$ मन − ५ का
(७) ७$\frac{१}{२}$ − $\frac{३}{५}$ का (८) २$\frac{१}{२}$ − १$\frac{१}{३}$ का (९) २$\frac{१}{७}$ − १$\frac{१}{१४}$ का
(१०) $\frac{५}{६} \div \frac{२}{३}$ का (११) $\frac{३}{८}$ रुपये को ६ लडकों में बराबर बराबर बाँटो। बताओ प्रत्येक को रुपये का कौन-सा भाग मिलेगा।

(१२) यदि २ पुस्तकों का मूल्य $\frac{७}{८}$ रुपया हो तो एक पुस्तक का मूल्य रुपये की कौन-सी भिन्न होगी ?

(१३) चीनी के १२ थैले तोल में $\frac{९}{१०}$ मन हैं। यदि प्रत्येक थैले मे बराबर चीनी हो तो एक थैले की चीनी का वज़न मन का कौन सा भाग होगा ?

(१४) १२ आनों मे $\frac{२}{३}$ आना कितनी बार सम्मिलित है ?

(१५) ४$\frac{१}{६}$ गज़ लम्बी रस्सी में से $\frac{५}{६}$ गज़ के कितने टुकड़े कट सकते हैं ?

(१६) ५$\frac{१}{४}$ गज़ लम्बी रस्सी में से ७ बराबर बराबर टुकड़े काटे गये। प्रत्येक टुकड़े की लम्बाई फ़ुटों में बताओ।

(१७) $\frac{१}{८}$ सेर के कितने बाट मिलकर $\frac{१}{८}$ मन के एक बाट के बराबर होंगे ?

(१८) $\frac{५}{६}$ फुट में से $\frac{१}{६}$ फुट के बराबर कितने टुकड़े बन सकते हैं ?

(१९) १$\frac{१}{२}$ आने प्रतिछंटाँक के भाव का कितना घी ६$\frac{३}{४}$ आने में लिया जा सकता है ?

(२०) यदि ७$\frac{१}{२}$ गज़ कपड़े का मूल्य २$\frac{१}{२}$ रुपया हो तो १ गज़ का मूल्य निकालो।

अभ्यास—३६

भाग दो :—

(१) $\frac{१}{१\frac{३}{७}}$ को ४ से। (२) $\frac{५}{९}$ को १५ से। (३) $\frac{७}{८}$ को २१ से।
(४) $\frac{९}{१२}$ को $\frac{३}{७}$ से। (५) $\frac{३}{२}\frac{१}{५}$ को $\frac{१}{१}\frac{४}{५}$ से। (६) १२$\frac{५}{७}$ को ८$\frac{४}{७}$ से।
(७) ३४$\frac{१}{८}$ को ७$\frac{७}{१०}$ से। (८) १३$\frac{४}{७}$ को १७$\frac{१}{१४}$ से। (९) $\frac{७}{१२}$ को $\frac{१}{३}\frac{१}{६}\frac{२}{३}$ से। (१०) ७३$\frac{१}{७}$ को ५$\frac{१}{१२}$ से।

मान निकालो :—

(११) $\frac{३}{८}$ ÷ ५$\frac{१}{२}$। (१२) ४$\frac{३}{४}$ ÷ ३$\frac{५}{८}$। (१३) ९$\frac{५}{७}$ ÷ २$\frac{३}{१२}$।
(१४) ५$\frac{२}{१५}$ ÷ ३$\frac{३}{३}$। (१५) १०$\frac{१}{१२}$ ÷ ११$\frac{१}{१०}$। (१६) $\frac{१}{५}\frac{१}{७}$ ÷ $\frac{१}{२५}$।
(१७) $\frac{६}{८}\frac{७}{३}\frac{५}{१६}$ ÷ $\frac{३}{३}\frac{७}{५}\frac{५}{६}\frac{१}{४}$। (१८) ५$\frac{६}{१२}$ + १$\frac{३}{२}\frac{३}{२}$।
(१९) $\frac{४}{७}\frac{७}{५}\frac{५}{२}\frac{१}{४}$ + $\frac{६}{४}\frac{२}{३}\frac{५}{५}\frac{१}{६}$। (२०) २९$\frac{१}{२}\frac{१}{५}\frac{१}{६}$ ÷ २२$\frac{३}{१}\frac{९}{१}\frac{३}{२}$।

(२१) रघुनाथ के पिता ३$\frac{३}{४}$ वर्ष में ४८०० रुपये पैदा करते हैं। तो उनकी वार्षिक आय बताओ।

(२२) यदि १३$\frac{१}{३}$ गज छींट का मूल्य ६$\frac{२}{३}$ रुपया हो तो एक गज का मूल्य निकालो।

(२३) ५$\frac{५}{८}$ रुपया प्रतिमन के भाव से कितने मन गेहूँ २४ रुपया १२ आने में लिये जा सकते हैं ?

(२४) एक मालगाड़ी २$\frac{५}{६}$ घंटे में ४५$\frac{१}{३}$ मील जाती है तो उसकी प्रतिघंटे की चाल बताओ।

(२५) ६$\frac{२}{३}$ रुपयों में से $\frac{५}{१२}$ रुपये प्रतिमज़दूर के हिसाब से कितने मज़दूरों को दे सकते हैं ?

(२६) एक लड़का एक पृष्ठ ७$\frac{१}{२}$ मिनट में लिख सकता है तो ३० मिनट में कितने पृष्ठ लिखेगा ?

(२७) यदि एक लड़के का एक क़दम १$\frac{३}{४}$ फ़ुट का हो तो १५$\frac{३}{४}$ फ़ुट चलने में वह कितने क़दम चलेगा ?

(२८) एक बर्तन में ८$\frac{१}{८}$ सेर घी है। यदि इसमें से $\frac{५}{८}$ सेर प्रतिदिन किसी घर में ख़र्च होता हो तो यह घी कितने दिन चलेगा ?

(२९) $\frac{४}{५}$ को किस संख्या से गुणा दें कि गुणनफल ३ हो ?

(३०) दो भिन्नों का गुणनफल २३ है, उनमें से एक भिन्न ३$\frac{२}{७}$ है। दूसरी बताओ।

(३१) भाज्य ४$\frac{५}{६}$ है, और भागफल १$\frac{३}{८}$ है तो भाजक बताओ।

(३२) $\frac{७}{९}$ में $\frac{१}{१८}$ कितनी बार सम्मिलित है ? और ६ में $\frac{३}{१७}$ कितनी बार सम्मिलित है ?

(३३) ८$\frac{१}{३}$ को किससे गुणा करें कि गुणनफल १५$\frac{१}{३}$ हो ?

(३४) १$\frac{१}{३}$ का ३$\frac{१}{२}$ को किससे गुणा करें कि २१$\frac{१}{२}$ गुणनफल हो ?

(३५) किस संख्या में ४$\frac{१}{३}$ का भाग दें कि भागफल ८$\frac{२}{६}$ हो ?

(३६) यदि १६$\frac{१}{३}$ रुपये ७ मनुष्यों में बराबर बराबर बाँटे जायँ तो प्रत्येक को क्या मिलेगा ?

(३७) यदि एक गज़ कपड़े का मूल्य २$\frac{१}{८}$ रुपये हो तो ५१$\frac{३}{८}$ रुपये में कितने गज़ कपड़ा आ सकता है ?

(३८) यदि $\frac{४}{५}$ मन अनाज हर एक आदमी को दिया जाय तो ११$\frac{१}{५}$ मन अनाज कितने आदमियों में बाँटा जा सकता है ?

(३९) एक घोड़ा ५$\frac{१}{८}$ घंटे में ५५$\frac{९}{१०}$ मील चलता है तो एक घंटे में कितनी दूर जायगा ?

(४०) १४$\frac{५}{७}$ मन लकड़ी कितने मनुष्य जला सकते हैं जब कि हर एक मनुष्य को ६$\frac{१}{२}$ सेर लकड़ी जलाने को मिले ?

७—कोष्ठों या बन्धनियों का प्रयोग

यदि हमें $\frac{१}{४}$ रु० और $\frac{५}{७}$ रु० ÷ $\frac{५}{६}$ को जोड़ना हो तो स्पष्ट है कि हम इस जोड़ को $\frac{१}{४}$ रु० + $\frac{५}{७}$ रु० ÷ $\frac{५}{६}$ के रूप में लिख सकते हैं। परन्तु ऐसा लिखने से एक और भी अर्थ यह हो सकता है कि $\frac{१}{४}$ रु० और $\frac{५}{७}$ रु० के योगफल को $\frac{५}{६}$ से भाग देना है। इस कठिनाई को दूर करने के लिए हमें स्पष्ट रीति से किसी प्रकार बता देना चाहिए कि ऐसी दशा में कौन-सा अर्थ लेकर हमें क्रिया करनी है। इस उदाहरण में दूसरे अर्थ को स्पष्ट करने के

लिए हम $\frac{१}{४}$ रु० + $\frac{१}{२}$ रु० को दो कोष्ठों या बन्धनियों (   ) के भीतर बन्द कर देते हैं, जैसा कि नीचे दिखाया गया है :—

$$\left(\frac{१}{४}\text{ रु०} + \frac{१}{२}\text{ रु०}\right) \div \frac{५}{६}$$

इन कोष्ठों के प्रयोग का यह उद्देश्य है कि कोष्ठों के भीतर जो क्रियायें प्रकट की जाती हैं उन्हें पहिले कर लेना चाहिए और तब बाहर की क्रिया करना चाहिए। इस प्रकार के कोष्ठ को छोटा कोष्ठ कहते हैं। अब तुमको यह समझने में कोई कठिनाई न होगी कि यदि हमें $\frac{३}{८}$ और $\frac{४}{१५}$ के योगफल को $\frac{५}{६}$ और $\frac{२}{३}$ के अन्तर से भाग देना हो और इस कुल क्रिया को हम निम्नलिखित रूप में लिखे तो हमारा ऐसा लिखना अशुद्ध होगा :—

$$\frac{३}{८} + \frac{४}{१५} \div \frac{५}{६} - \frac{२}{३},$$

क्योंकि इससे यह अर्थ निकलता है कि $\frac{४}{१५}$ को $\frac{५}{६}$ से भाग देकर जो भजनफल आता है उसे $\frac{३}{८}$ मे जोड़ कर योगफल में से $\frac{२}{३}$ को घटाना है। इसलिए ऐसी दशा में अपने अर्थ को स्पष्ट करने के लिए हम $\frac{३}{८} + \frac{४}{१५}$ को और $\frac{५}{६} - \frac{२}{३}$ को कोष्ठों में बन्द कर देते हैं, जैसा कि नीचे दिखाया गया है :—

$$\left(\frac{३}{८} + \frac{४}{१५}\right) \div \left(\frac{५}{६} - \frac{२}{३}\right)$$

यदि $\frac{३}{८}$ और $\frac{४}{१५}$ के योगफल को $\frac{५}{६}$ और $\frac{२}{३}$ के अन्तर से गुणा करना हो तो कुल क्रिया को $\left(\frac{३}{८} + \frac{४}{१५}\right) \times \left(\frac{५}{६} - \frac{२}{३}\right)$ या केवल $\left(\frac{३}{८} \times \frac{४}{१५}\right)$ $\left(\frac{५}{६} - \frac{२}{३}\right)$ के रूप में लिखते हैं, क्योंकि ऐसी दशा में गुणनचिह्न का लोप कर दिया जाता है।

अब यदि $\frac{३}{८}$ और $\frac{४}{१८}$ के योगफल को $\frac{५}{६}$ और $\frac{२}{३}$ के अन्तर से भाग देने पर जो भजनफल आता है उसे १२ में से घटाना हो तो इस कुल क्रिया को प्रकट करने के लिए दूसरे प्रकार के कोष्ठ { } का, जिसको मँझला कोष्ठ कहते हैं, प्रयोग करते हैं और कुल क्रिया को निम्नलिखित रूप में लिखते हैं :—

$$१२ - \{ (\frac{३}{८} + \frac{४}{१८}) \div (\frac{५}{६} - \frac{२}{३}) \}$$

अब यदि १२ और $\{ (\frac{३}{८} + \frac{४}{१८}) \div (\frac{५}{६} - \frac{२}{३}) \}$ के अन्तर का $\frac{५}{७}$ भाग प्रकट करना हो तो एक और कोष्ठ [ ] का, जिसे बड़ा कोष्ठ कहते हैं, प्रयोग करते हैं, और कुल क्रिया को निम्नलिखित रूप में लिखते हैं :—

$$[१२ - \{ (\frac{३}{८} + \frac{४}{१८}) - (\frac{५}{६} - \frac{२}{३}) \}] \text{ का } \frac{५}{७}$$

गणित में साधारणतया यही तीन प्रकार के कोष्ठ काम में आते हैं। यदि कभी इन तीन कोष्ठों के अतिरिक्त एक और कोष्ठ की आवश्यकता हो तो जिन भिन्नों या संख्याओं को इस कोष्ठ के भीतर बन्द करना हो उनके ऊपर एक पड़ी लकीर '———' खीच देते हैं, जो कोष्ठ का काम देती है। जैसे, यदि ऊपर के उदाहरण में अर्थात् "$[१२ - \{ \frac{३}{८} + \frac{४}{१८}) \div (\frac{५}{६} - \frac{२}{३}) \}]$ का $\frac{५}{७}$" में $\frac{५}{६}$ से $\frac{२}{३}$ के बदले "$\frac{२}{३} + \frac{१}{१२}$" घटाना हो तो हमको चाहिए कि "$\frac{२}{३} + \frac{१}{१२}$" के ऊपर एक पड़ी लकीर खींच दें, जैसा कि आगे दिखाया गया

है, नहीं तो $\frac{५}{६} - \frac{२}{३} + \frac{१}{१२}$ का अर्थ यह हो जायगा कि $\frac{५}{६}$ और $\frac{१}{१२}$ के योगफल में से $\frac{२}{३}$ घटाना है :—

$[१२ - \{ (\frac{३}{८} + \frac{५}{१८}) \div (\frac{५}{६} - \overline{\frac{२}{३} + \frac{१}{१२})} \}]$ का $\frac{५}{७}$ ।

कोष्ठों के विषय में ऊपर जो कुछ बताया गया है उससे तुम समझ गये होगे कि किसी एक प्रकार के कोष्ठ के जोड़े के भीतर जितनी भिन्नें बन्द रहती है उनको, जोड़, बाकी, गुणा, भाग आदि यथावश्यक क्रियायें करके जब तक हम एक भिन्न में लाकर संक्षिप्त रूप में प्रकट नहीं करते हैं तब तक इन कोष्ठों को हम नहीं निकाल सकते हैं, क्योंकि कोष्ठों के प्रयोग का उद्देश्य केवल यही है कि किसी एक प्रकार के दो कोष्ठों के भीतर जो कुछ क्रियायें प्रकट की जाती हैं उनको सबसे पहिले करके तब आगे बढ़ना चाहिए।

इन उदाहरणों से यह भी मालूम होता है कि जब तक हम छोटे कोष्ठों को सरल नहीं कर लेते हैं तब तक हम बड़े कोष्ठों को सरल नहीं कर सकते हैं इसलिए हमको सबसे पहिले कोष्ठों में से सबसे भीतर के कोष्ठ अर्थात् पड़ी लकीर के नीचे की भिन्नों को सरल करना चाहिए, और तब उससे बाहर के कोष्ठों को अर्थात् छोटे, मँझले और बड़े कोष्ठों को क्रमशः सरल करना चाहिए।

अब कोष्ठों के प्रयोग पर नीचे कुछ उदाहरण दिये जाते हैं।

उदाहरण १—$[१२ - \{(\frac{३}{८} + \frac{५}{१८}) - \frac{५}{६} - \overline{\frac{२}{३} + \frac{१}{१२})}\}]$ का $\frac{५}{७}$ को संक्षेप करो।

दी हुई राशि $= \left[१२ - \left\{\left(\frac{३}{८} + \frac{४}{१८}\right) - \left(\frac{५}{१६} - \frac{८+१}{१२}\right)\right\}\right]$ का $\frac{५}{७}$ (पदी लकीर के नीचे की भिन्नों को सरल करने से)

$= \left[१२ - \left\{\left(\frac{३}{८} + \frac{४}{१८}\right) \div \left(\frac{५}{१६} - \frac{३}{४}\right)\right\}\right]$ का $\frac{५}{७}$

$= \left[१२ - \left\{\frac{९+४}{१८} \div \frac{१०-९}{१२}\right\}\right]$ का $\frac{५}{७}$ (छोटे कोष्ठों को सरल करने से)

$= \left[१२ - \left\{\frac{१\cdot ३}{\cancel{१}\cancel{५}} \times \frac{\cancel{१}\cancel{२}^{४}}{१}\right\}\right]$ का $\frac{५}{७}$

$\qquad ५$

$= \left[\left\{१२ - \frac{५२}{५}\right\}\right]$ का $\frac{५}{७}$ (मँझले कोष्ठों को सरल करने से)

$= \frac{८}{\cancel{५}}$ का $\frac{\cancel{५}}{७}$ (बड़े के ष्ठों वा सरल करने से)

$= \frac{८}{७}$

$= १\frac{१}{७}$

उदाहरण २—$\left\{\frac{९}{२} \div \left(\frac{३}{३} \times \overline{\frac{२}{५}} + \overline{\frac{३}{४}}\right)\right\}$ को संक्षेप करो।

दी हुई राशि $= ४\frac{५}{२} \div \left(\frac{३}{३} \times \frac{८+१५}{२०}\right)$

$= ४\left\{\frac{५}{२} \div \left(\frac{३}{३} \times \frac{२३}{२०}\right)\right\}$

$= ४\left\{\frac{५}{८} \times \frac{३ \times २०}{२ \times २३}\right\}$

$= \cancel{४} \times \frac{५}{\cancel{२}\cancel{८}} \times \frac{३ \times २०५}{३ \times २३} = \frac{७५}{२३} = ३\frac{६}{२३}$

अभ्यास - ३७

सबसे संक्षिप्त रूप मे मान निकालो —

(१) $४ - ३\frac{३}{७} (३\frac{४}{९} - \frac{४}{७})$

(२) $\frac{५}{८}$ का $(३\frac{३}{४} - २\frac{१}{२})$

(३) $३\frac{३}{१०} - (३\frac{१}{१०} - \overline{७\frac{१}{०} - ५\frac{२}{४}}) - ५\frac{१}{३}$

(४) $१७\frac{३}{५} + (३\frac{१}{२} - \frac{१}{५}) (३\frac{२}{३} + ३\frac{१}{२}) - (३\frac{२}{३} + २\frac{१}{२})$

(५) $\{३\frac{१}{४} - (\frac{१}{४} + १\frac{१}{४} - \frac{१}{२})\} - २\frac{१}{४} + \frac{३}{४}$

(६) $१२ [\frac{३}{४} - \{२ - (\frac{५}{८} - \overline{\frac{१}{५} + \frac{३}{१०}})\}]$

(७) $१ - \{\frac{३}{७} (४\frac{१}{२} - \overline{२\frac{१}{४} + १\frac{१}{२}})\}$

(८) $(६\frac{३}{८} - २\frac{१}{४}) (४\frac{१}{२} \quad \overline{७\frac{१}{६} + १\frac{१}{३}})$

(९) $२\frac{१}{२}$ का $[८\frac{३}{४} - \{(४\frac{३}{५} - २\frac{१}{२}) (२\frac{३}{७} + १\frac{१}{२})\}]$

(१०) $१\frac{१}{२} [३\frac{१}{८} - \{२\frac{१}{५} + (१ \div \frac{१}{२} + \frac{३}{४})\}]$

(११) $१\frac{१}{२०} - \{(\frac{४}{५} - \overline{\frac{१}{२} - \frac{१}{५}}) - (४\frac{४}{५} \times २\frac{१}{२})\}$

(१२) $(३\frac{१}{२} - \overline{९\frac{१}{२} - ३\frac{१}{६}}) - (२\frac{४}{५}$ का $\frac{३}{७})$

(१३) $४\frac{२}{३} - [\{(४\frac{४}{५} - १\frac{५}{७}) + (४\frac{४}{५} - १\frac{५}{७})\} - २\frac{३}{३५}]$

(१४) $\{(\frac{१७}{२८} - \frac{३}{५})$ का $२\frac{६}{७}\} + (१\frac{२}{५} - \overline{\frac{४}{२५} + \frac{१}{१०}})$

(१५) $४\frac{१}{५} - \{२\frac{१}{२} - (२\frac{३}{७} - \overline{१\frac{३}{१४} - \frac{५}{७}})\}$

(१६) $८\frac{१}{२} - [१४\frac{३}{४} - \{४\frac{७}{८} + (५\frac{३}{८} - \overline{२\frac{२}{५} + १\frac{३}{५}})\}]$

(१७) $२\frac{३}{११} [\frac{३}{४}\{\frac{५}{६}(१\frac{४}{५} - \frac{७}{१०}) (\frac{१}{६} + \frac{१}{२})\}]$

(१८) $\frac{१}{३}$ का $[७\frac{१}{५}\{१\frac{१}{२} + (\overline{१\frac{१}{२} + ६\frac{१}{२} \times \frac{१}{१३}}) - \frac{१}{२}\}]$

(१९) $१२ \div [२\frac{१}{२} + \frac{१}{३}\{२\frac{३}{४} + \frac{१}{३} (६ - ३)\}]$

(२०) $६\frac{२}{३} - [३\frac{१}{३} \div \{६\frac{२}{३} - (\overline{३\frac{१}{३} + ३\frac{२}{९} - २\frac{१}{३}})\}]$

८—ऐसी भिन्नों का संक्षेप करना जिनमें जोड़, बाक़ी, गुणा और भाग की क्रियायें साथ साथ हों।

जब भिन्नों में जोड़, बाक़ी, गुणा और भाग की क्रियायें मिली-जुली रहती हैं तब उनको संक्षेप करने के लिए तुमको केवल यह जानना आवश्यक है कि इन क्रियाओं को किस क्रम से करना चाहिए। निम्नलिखित उदाहरणों से यह क्रम स्पष्ट हो जायगा।

उदाहरण १—मान लो कि हमें १६ रु० में से १५ रु० का $\frac{२}{३}$ घटाना है। यहाँ हम पहिले १५ रु० के $\frac{२}{३}$ का मान निकालेंगे और तब इस राशि का १६ रु० में से घटा देंगे. जैसा कि नीचे दिखाया गया है :—

१६ रु० − १५ रु० का $\frac{२}{३}$ = १६ रु० − १० रु० = ६ रु०

उदाहरण २—इसी तरह जब हमें ८ रु० में $\frac{१}{२}$ रु० का ५ गुणा जोड़ना है तब हम पहिले $\frac{१}{२}$ रु० का ५ गुणे का मान निकाल कर उसे ८ रु० में जोड देते हैं, जैसा कि आगे दिखाया गया है :—

८ रु० + $\frac{३}{८}$ रु० का ५ गुणा = ८ रु० + $\frac{३}{८}$ रु० × ५

= ८ रु० + $\frac{१५}{८}$ रु०

= ८ रु० + १$\frac{७}{८}$ रु०

= ९$\frac{७}{८}$ रु०

उदाहरण ३—अब मान लो कि हमें ४ रु० में से $\frac{३}{४}$ रु० का चौथाई भाग घटाना है। यहाँ हम पहिले $\frac{३}{४}$ रु० के चौथाई भाग का मान निकालेंगे और तब इसको ४ रु० में से घटा देंगे, जैसा कि नीचे दिखाया गया है :—

४ रु० − $\frac{३}{४}$ रु० − ४ = ४ रु० − $\frac{३}{१६}$ रु० = २$\frac{१३}{१६}$ रु०

उदाहरण ४—यदि हमे यह मालूम करना हो कि २० गज के $\frac{३}{५}$ में ६ गज का $\frac{२}{३}$ कितनी बार शामिल है तो स्पष्ट है कि हम पहिले २० गज के $\frac{३}{५}$ का और ६ गज के $\frac{२}{३}$ का मान निकालेंगे और तब पहिले मान को दूसरे से भाग देंगे, जैसा कि नीचे दिखाया गया है :—

३० गज का $\frac{३}{५}$ ÷ ६ गज का $\frac{२}{३}$ = १२ गज − ४ गज = ३

उदाहरण ५—मान लो कि हमें २० रु० के चौथाई भाग को २ से गुणा देना है। यहाँ हम पहले २० रु० को ४ से भाग देकर तब भागफल को २ से गुणा देकर उत्तर १० रु० निकालते हैं। इस क्रिया को हम निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं :—

२० रु० ÷ ४ × २ = ५ रु० × २ = १० रु०

इस उदाहरण में भाग की क्रिया पहिले की गई है। यदि हम गुणा की क्रिया पहिले करते हैं अर्थात् ४ को २ से गुणा देकर गुणनफल ८ से २० रु० को भाग देते हैं तो उत्तर $\frac{२०}{८}$ रु० आयेगा जिसकी अशुद्धि के विषय में कुछ भी सन्देह नहीं हो सकता।

उदाहरण ६—अब यदि मान लिया जाय कि हमें २० रु० के २ गुने का चौथाई भाग मालूम करना है तो स्पष्ट है कि उत्तर ४० रु० का $\frac{१}{४}$ अर्थात् १० रु० होगा। इस क्रिया को हम निम्न-लिखित रूप में लिखते हैं :—

२० रु० × २ ÷ ४ = ४० रु० ÷ ४ = १० रु०

इस उदाहरण में गुणा की क्रिया पहिले की गई है। यदि हम यहाँ भाग की क्रिया पहिले करते हैं, अर्थात् २ को ४ से भाग देकर भागफल $\frac{२}{४}$ या $\frac{१}{२}$ से २० रु० को गुणा देते हैं तो भी उत्तर वही अर्थात् १० रु० आता है। अर्थात्,

२० रु० × २ ÷ ४ = (२० रु० × २) ÷ ४

या २० रु० × (२ ÷ ४)

= १० रु०

इन उदाहरणों से तथा ऐसे ही और उदाहरणों से तुमको ये बातें समझ में आ जायेंगी कि जब जोड़, बाक़ी, गुणा और भाग का क्रियाओं के चिह्न साथ साथ रहते हैं तब (१) जोड़ और बाक़ी की क्रियाओं को करने से पहिले हमें गुणा और भाग की

क्रियायें करनी चाहिए (२) जब गुणा और भाग के चिह्न एक साथ हों तब भाग की क्रिया गुणा से पहिले करनी चाहिए चाहे इनमें से कोई भी चिह्न पहिले हो; और (३) जब इन चिह्नों से मिली हुई भिन्नों के साथ "का" से जुड़ी हुई भिन्नें भी हों तब "का" चिह्न से जो क्रिया प्रकट की जाती है उसे गुणा और भाग की क्रिया से भी पहिले कर लेना चाहिए, क्योंकि तुमको पहिले ही यह बताया जा चुका है कि दो या अधिक भिन्नों के बीच मे "का" चिह्न होने पर कुल को हम एक ही राशि समझते हैं और प्रभागजाति भिन्न कहते हैं।

अब इन नियमों पर अभ्यास के लिए कुछ उदाहरण नीचे दिये जाते हैं।

उदाहरण ७ — $\frac{४}{५} - \frac{१}{४} - \frac{१}{२} + \frac{१}{५}$ को संक्षेप करो।

यहाँ भाग चिह्न से जो क्रिया प्रकट की गई है उसे पहिले करना चाहिए अर्थात् $\frac{१}{४} \div \frac{१}{२}$ को पहिले संक्षेप करना चाहिए। इस प्रकार,

$$\frac{४}{५} - \frac{१}{४} \div \frac{१}{२} + \frac{१}{५} = \frac{४}{५} - \left(\frac{१}{४} \times \frac{२}{१}\right) + \frac{१}{५}$$

$$= \frac{४}{५} - \frac{१}{२} + \frac{१}{५}$$

$$= \frac{८ - ५ + २}{१०}$$

$$= \frac{५}{१०} = \frac{१}{२}$$

उदाहरण ८—$\frac{५}{१४}$ का $\frac{२१}{२५} \div \frac{३}{५} \times \frac{४}{६}$ को संक्षेप करो।

चूँकि यहाँ "$\frac{५}{१४}$ का $\frac{२१}{२५}$" प्रभागजाति भिन्न है इसलिए इसको सबसे पहिले संक्षेप करके साधारण भिन्न में लाना चाहिए और तब बाक़ी क्रियायें करनी चाहिए। इस प्रकार :—

$$\frac{५}{१४} \text{ का } \frac{२१}{२५} - \frac{३}{५} \times \frac{४}{६} = \frac{\cancel{५} \times \cancel{२१}^{३}}{\cancel{१४}_{२} \times \cancel{२५}_{५}} \div \frac{३}{५} \times \frac{४}{६}$$

$$= \frac{\cancel{३}}{\cancel{१०}_{\cancel{२}}} \times \frac{\cancel{५}}{\cancel{३}} \times \frac{\cancel{४}^{\cancel{२}}}{\cancel{६}_{३}}$$

$$= \frac{१}{३}$$

यहाँ हम प्रभागजाति भिन्न को साधारण भिन्न में बिना परिवर्तन किये भी प्रश्न को हल कर सकते हैं, जैसा कि नीचे दिखाया गया है :—

$$\frac{५}{१४} \text{ का } \frac{२१}{२५} + \frac{३}{५} \times \frac{४}{६} = \frac{\cancel{५}}{\cancel{१४}_{\cancel{२}}} \times \frac{\cancel{२१}^{३}}{\cancel{२५}} \times \frac{\cancel{५}}{\cancel{३}} \times \frac{\cancel{४}}{\cancel{६}_{३}}$$

$$= \frac{१}{३}$$

यह रीति पहिली रीति से सरल और संक्षिप्त होने के कारण ऐसे प्रश्नों के हल करने में इसी का प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण ९—$१\frac{२}{३}$ का $\frac{१}{८} \div \frac{५}{३} \times \frac{१}{४} + १\frac{१}{४} \times \frac{४}{१५} \div \frac{१}{३} - \frac{५}{८}$ का $\frac{३}{१०}$ को संक्षेप करो।

दी हुई राशि $= (\frac{५}{३} \text{ का } \frac{१}{८}) \div \frac{५}{३} \times \frac{१}{४} + \frac{५}{४} \times (\frac{४}{१५} \div \frac{१}{३}) - \frac{५}{८} \text{ का } \frac{३}{\cancel{१०}_{२}}$

$$= (\frac{१}{३} \div \frac{१}{३}) \times \frac{१}{४} + \frac{५}{४} \times (\frac{४}{\cancel{१५}_{५}} \times \frac{\cancel{३}}{१}) - \frac{३}{१६}$$

$$= \frac{१}{\cancel{३}} \times \frac{\cancel{३}}{१} \times \frac{१}{४} + \frac{\cancel{५}}{\cancel{४}} + \frac{\cancel{४}}{\cancel{५}} - \frac{३}{१६}$$

$$= \frac{१}{४} + १ - \frac{३}{१६}$$

$$= \frac{४ + १६ - ३}{१६}$$

$$= \frac{१७}{१६} = १\frac{१}{१६}$$

उदाहरण १०—$\frac{३}{८} \div \frac{१}{१०} \times \frac{१}{२}$ **और** $\frac{३}{८} - \frac{१}{१०}$ का $\frac{१}{२}$ का अन्तर निकालो।

$$\frac{३}{८} \div \frac{१}{१०} \times \frac{१}{२} = (\frac{३}{८} - \frac{१}{१०}) \times \frac{१}{२}$$

$$= (\frac{\cancel{३}}{\cancel{८}} \times \frac{\cancel{१०}^{२}}{\cancel{३}_{३}}) \times \frac{१}{२}$$

$$= (\frac{\cancel{२}}{३} \times \frac{१}{\cancel{२}}$$

$$= \frac{१}{३}$$

$\frac{३}{५} \div \frac{१}{१०}$ का $\frac{१}{२} = \frac{३}{५} \div (\frac{१}{१०}$ का $\frac{१}{२})$

$= \frac{३}{५} \div \frac{१}{२०}$

$= \frac{\cancel{३}}{\cancel{५}} - \frac{\cancel{२०}^{४}}{\cancel{१}}$
$\quad ३$

$= \frac{४}{३}$

$= १\frac{१}{३}$

अभीष्ट अन्तर $= १\frac{१}{३} - \frac{१}{३} = १$

अभ्यास—३८

सरल करो :—

(१) $\frac{४}{५} \div \frac{६}{९} \div \frac{५}{७}$

(२) $\frac{४}{७} \times \frac{७}{९} \div \frac{५६}{२१}$

(३) $\frac{४}{७} \times ५\frac{३}{८} \div \frac{४}{९}$

(४) $\frac{३}{५} + \frac{४}{५}$ का $\frac{३}{४}$

(५) $\frac{३}{५} + \frac{४}{५} \times \frac{३}{४}$

(६) $६\frac{२}{३} \div २\frac{१}{३}$ का $\frac{१}{७}$

(७) $६\frac{२}{३} - ३\frac{१}{६} \times \frac{१}{७}$

(८) $९\frac{१}{३} \div \frac{३}{५}$ का $\frac{७}{९} \times \frac{४}{५}$

(९) $१\frac{३}{७}$ का $\frac{२}{५} - \frac{४}{५} + \frac{२}{७}$

(१०) $२\frac{१}{३} + \frac{२}{३} + \frac{४}{९} \div \frac{१}{२}$

(११) $\frac{१}{२} \div \frac{१}{५} + \frac{१}{७} \div \frac{१०}{१४}$

(१२) $\frac{११}{१२} \div \frac{१२१}{१४४} + \frac{३}{७} \times ४\frac{२}{३}$

(१३) $५\frac{४}{५} + \frac{१}{५} \div \frac{१}{१६}$ का $\frac{२}{३} + \frac{३}{४}$

(१४) $\frac{१}{७} + \frac{१}{७} \div \frac{१}{७}$ (१५) $\frac{२}{३} + \frac{२}{३}$ का $\frac{२}{३} \div \frac{२}{३}$ का $\frac{२}{३} \times \frac{२}{३} - \frac{२}{३}$

(१६) २४ का $\frac{३}{४} \div १\frac{१}{५} + २$ का $\frac{१}{३} \div ६$ ।

(१७) $\frac{५}{१२} \times १\frac{३}{५}$ का $१\frac{१}{२} + ४\frac{१}{६}$ का $\frac{१}{५} \div \frac{१}{३}$ ।

(१८) $७\frac{१}{३} + ३\frac{२}{३}$ का $४ + २\frac{१}{२} \div २\frac{१}{३} - १\frac{१}{२}$ ।

(१९) $८\frac{१}{४} \div \frac{११}{१६}$ का $\frac{५}{६} - \frac{१}{४}$ का $२\frac{१}{२} \div \frac{३}{४} \times \frac{३}{४}$ ।

(२०) $\frac{११}{१३}$ का $\frac{५२}{५५} + \frac{७}{८} \div १\frac{३}{४}$ का $\frac{३}{४}$ का $\frac{४}{५} \div \frac{५}{८} \times \frac{४}{९} - १\frac{१}{९}$ ।

९—भागानुबन्ध भिन्न

अब तक केवल साधारण भिन्नों का ही वर्णन हुआ है, जिनके अंश और हर दोनों में पूर्णांक थे, परन्तु ऐसी भी भिन्न होती हैं जिनके अंश या हर या दोनों साधारण भिन्न हों या कई साधारण भिन्नों से मिलकर बने हों। इस प्रकार की भिन्नों को **भागानुबन्ध भिन्न** कहते हैं।

जैसे $\frac{८}{९}$, $\frac{४}{\frac{६}{११}}$, $\frac{२}{७}$ $\frac{\frac{१}{३}}{\frac{३}{४}}$, $\frac{\frac{१}{७}\times ५\frac{१}{६}}{\frac{८}{९}\text{ का }७}$, आदि।

नोट—$\frac{३\frac{१}{७}}{७\frac{२}{४}}$ को यों $३\frac{१}{७}$ बटा हुआ $७\frac{२}{४}$ पढ़ते हैं।

भागानुबन्ध भिन्नों के संक्षेप करने में हम अंश और हर को अलग अलग संक्षेप करके प्रत्येक को एक साधारण भिन्न के रूप में लाते हैं और तब अंश को हर से भाग देते हैं। अंश और हर के संक्षेप करते समय पहिले प्रभाग जाति भिन्नों से साधारण भिन्न बना लेना चाहिए, और फिर गुणा व भाग की क्रियायें करके तब जोड़ने और घटाने की क्रियायें करनी चाहिए।

उदाहरण १—$\frac{४\frac{१}{२}}{१\frac{१}{२}}$ को संक्षेप करो।

हमें $४\frac{१}{२}$ को $१\frac{१}{२}$ से भाग देना है।

$४\frac{१}{२} - १\frac{१}{२} = \frac{९}{२} \div \frac{३}{२} = \frac{९}{२} \times \frac{२}{३} = ३$ उत्तर।

उदाहरण २—$\frac{३\frac{१}{४}}{२\frac{५}{६}} \times \frac{२\frac{१}{२} - \frac{१}{६}}{\frac{२}{६} \times \frac{१}{३}}$ को सरल करो।

हमें दो भागानुबन्ध भिन्नों का गुणनफल निकालना है; इसलिए हर एक को ऐसे रूप में लाना चाहिए जिससे गुणन में सुभीता हो।

अब $\frac{३\frac{१}{४}}{२\frac{१}{६}} = \frac{१३}{४} \div \frac{१३}{६} = \frac{१३}{४} \times \frac{६}{१३} = \frac{३}{२}$

और $२\frac{१}{२} - \frac{१}{६} = २\frac{३-१}{६} = २\frac{२}{६} = २\frac{१}{३} = \frac{७}{३}$

इसलिए $\frac{२\frac{१}{२} - \frac{१}{६}}{\frac{२}{३} \times \frac{१}{२}} = \frac{\frac{७}{३}}{\frac{२}{३} \times \frac{१}{२}} = \frac{७}{३} \times \frac{३}{२} \times \frac{२}{१} = ७$

इसलिए $\frac{३\frac{१}{४}}{२\frac{१}{६}} \times \frac{२\frac{१}{२} - \frac{१}{६}}{\frac{२}{३} \times \frac{१}{२}} = \frac{३}{२} \times ७ = \frac{२१}{२} = १०\frac{१}{२}$

कुछ अभ्यास हो जाने पर किसी प्रश्न के प्रत्येक भागानुबन्ध भिन्न को अलग अलग लिख कर संक्षेप करने की आवश्यकता नहीं होगी। सब भिन्नों को एक ही साथ लिख कर तुमको संक्षेप कर लेना चाहिए, जैसा कि नीचे के उदाहरण में दिखाया गया है:—

उदाहरण ३—$\frac{३}{\frac{१}{२}} \div \frac{२\frac{२}{५}}{१\frac{१}{३}}$ का $\frac{१\frac{१}{२}}{\frac{३}{४}} \times \frac{\frac{१}{२} + \frac{३}{४} \text{ का } \frac{१}{३}}{(४ + \frac{१}{२}) \div ३}$ को संक्षेप करो।

दी हुई राशि

$= (३ \div \frac{१}{२}) - \left\{(२\frac{२}{५} \div १\frac{१}{३} \text{ का})(१\frac{१}{२} \div \frac{३}{४})\right\} \times \left\{(\frac{१}{२} + \frac{३}{४} \text{ का } \frac{१}{३})\right.$

$\left.\div (४ + \frac{१}{२}) \div ३)\right\}$

$$= (३ \times २) - \left\{\left(\frac{१४}{५} \times \frac{३}{४}\right) \text{का} \left(\times \frac{४}{३}\right)\right\} \times \left\{\left(\frac{१}{२} \times \frac{१}{४}\right) \div \left(\frac{१}{२} \div २\right)\right\}$$

$$= ६ - \left\{\frac{९}{५} \text{ का } २\right\} \times \left\{\frac{(१+२)}{८} \div \left(\frac{४}{२} \times \frac{१}{४}\right)\right\}$$

$$= ६ - \left(\frac{१८}{५}\right) \times \left(\frac{३}{८} \div \frac{३}{२}\right)$$

$$= ६ - \frac{१८}{५} \times \left(\frac{३}{८} \times \frac{२}{३}\right)$$

$$= ६ - \frac{१८}{५} \times \frac{१}{४}$$

$$= \frac{१ \times ५}{१८ \times १४}$$

$$= ४\frac{१}{२}$$

अभ्यास—३९

निम्नलिखित भिन्नों को सरल करो :—

(१) $\frac{३\frac{१}{६}}{९\frac{१}{२}}$ (२) $\frac{३\frac{१}{३}}{२\frac{१}{२}} - \frac{६}{४\frac{१}{२}}$ (३) $\frac{\frac{२}{५} \text{ का } ३\frac{३}{४}}{३\frac{३}{४} + \frac{२}{५}}$

(४) $\frac{१\frac{१}{३} \text{ का } ३\frac{१}{२} - \frac{५}{८} \text{ का } \frac{१}{५}}{१\frac{१}{३} \text{ का } \frac{३}{४}}$ (५) $\frac{१ + १\frac{१}{३}}{\frac{५}{३} \text{ का } १\frac{१}{३}} - \frac{२\frac{१}{३}}{\frac{३}{४}}$

(६) $\frac{२ + १\frac{१}{५} - १\frac{४}{५}}{२ - १\frac{१}{५} - १\frac{३}{५}}$

(७) किस राशि को $३\frac{१}{२}$ का $\frac{४}{५}$ का $\frac{२}{३}$ से गुणा करें कि फल $\frac{७}{९}$ हो ?

(८) किस भिन्न से $\frac{६}{७}$ का $\frac{२}{३} + १\frac{३}{५}$ को भाग दें कि लब्धि ५ हो ?

(९) $१\frac{१}{२} + \frac{१}{४} + \frac{१}{८}$ में $\frac{१}{२} + ३\frac{१}{६}$ कितनी बार शामिल है ?

(१०) ६$\frac{३}{४}$ और ५$\frac{१}{२}$ के जोड़ को ५$\frac{१}{८}$ और ४$\frac{१}{३}$ के अन्तर से भाग दिया गया है, तो लब्धि क्या है ?

(११) २$\frac{१}{६}$ का ३$\frac{१}{२}$ और ४$\frac{३}{४}$ का $\frac{२}{३}$ के जोड़ में से, २$\frac{१}{६}$ को $\frac{३}{३}$ से भाग देकर जो लब्धि मिले वह घटाओ।

(१२) ३$\frac{१}{२}$ को १$\frac{१}{१२}$ से और १$\frac{५}{१२}$ को $\frac{७}{३}$ से भाग देकर जो लब्धियां मिले उन्हे जोड़ो।

संक्षेप करो :—

(१३) $\dfrac{\frac{१}{१\frac{५}{६}} \text{ का } २\frac{१}{२}\frac{४}{५}}{५\frac{१}{३} \text{ का } \frac{१}{३\frac{१}{२}} + \frac{३}{५}}$ । (१४) $\dfrac{१४ \times \frac{५}{७} \text{ का } १\frac{१}{४}}{\frac{२}{३} \times ५ \text{ का } \dfrac{३}{२\frac{१}{२}}} \div ३\frac{१}{६}$

(१५) $\dfrac{२\frac{३}{४} - १\frac{१}{५}}{\frac{१}{३\frac{७}{६}} + \frac{१}{३} \text{ का } \frac{१}{४}} \div २\frac{१}{२}\frac{३}{५}$

(१६) $\dfrac{३\frac{१}{१\frac{०}{३}} - २\frac{१}{२}}{\frac{१}{१\frac{५}{३}} + \frac{१}{४}} \div \dfrac{२\frac{१}{१\frac{७}{८}} - १\frac{३}{८}}{२\frac{३}{८} + ७\frac{१}{२}}$

(१७) $\dfrac{५\frac{१}{४}}{१\frac{१}{३} - २\dfrac{\frac{१}{२} - \frac{५}{८}}{३\frac{१}{३}}}$ (१८) $\dfrac{२ + \dfrac{\frac{१}{५} + \frac{१}{६}}{\frac{१}{५} - \frac{१}{६}}}{३ - \frac{१}{५}\dfrac{\text{का } \frac{१}{६}}{\frac{१}{५} + \frac{१}{६}}}$

(१९) $\dfrac{\frac{५}{७} + १\frac{३}{३} - १\frac{१}{४}}{१\frac{४}{२१} + १\frac{६}{७}} \times \dfrac{२\frac{३}{१७}}{४\frac{६}{१७}}$

(२०) $\dfrac{४\frac{३}{१६}}{२\frac{१}{१२} + \frac{५}{१६}} - \dfrac{३\frac{५}{१८}}{५\frac{५}{१४} - ३\frac{५}{१८}}$

१२—मिश्र राशियों के साधारण भिन्न

नीचे के उदाहरणों से मालूम हो जायगा कि इस प्रकार के प्रश्न कैसे हल किये जाते हैं :—

उदाहरण १—८३ रु० ५ आ० ७ पा० के $\frac{११}{४}$ का मान निकालो।

इसकी क्रिया चार भिन्न भिन्न रीति से हो सकती है जैसा कि नीचे दिखाया गया है :—

पहली रीति

यहाँ हम ८३ रु० ५ आ० ७ पा० को ४ से भाग देकर लब्धि को ११ से गुणा देते हैं। इस प्रकार :—

	रु०	आ०	पा०
४	८३	५	७
	२०	१३	४$\frac{३}{४}$ = ८३ रु० ५ आ० ७ पा० का $\frac{१}{४}$
			११
	२२९	३	४$\frac{१}{४}$ = ,, ,, ,, का $\frac{११}{४}$

दूसरी रीति

यहाँ हम ८३ रु० ५ आ० ७ पा० को पहिले ११ से गुणा देते हैं और तब गुणनफल को ४ से भाग देते हैं। इस प्रकार:—

रु०	आ०	पा०	
८३	५	७	
		११	
४ | ९१६	१३	५	= ८३ रु० ५ आ० ७ पा० का ११ गुणा
२२९	३	४$\frac{१}{४}$	= ,, ,, ,, $\frac{११}{४}$

तीसरी रीति

इस रीति में हम पहिले $\frac{११}{४}$ को २$\frac{३}{४}$ में बदल लेते हैं और तब ८३ रु० ५ आ० ७ पा० का २ गुना और ८३ रु० ५ आ० ७ पा० का $\frac{३}{४}$ अलग अलग निकाल कर जोड़ देते हैं। इस प्रकार :—

	रु०	आ०	पा०	
४ |	८३	५	७	
	२०	१३	४$\frac{३}{४}$	= ८३ रु० ५ आ० ७ पा० का $\frac{१}{४}$
			३	
	६२	८	२$\frac{१}{४}$	= ,, ,, ,, ,, $\frac{३}{४}$
	१६६	११	२	= ,, ,, ,, २ गुना
	२२९	३	४$\frac{१}{४}$	= ,, ,, ,, २$\frac{३}{४}$,,

चौथी रीति

चूँकि २$\frac{३}{४}$ = ३ − $\frac{१}{४}$, इसलिए स्पष्ट है कि ८३ रु० ५ आ० ७ पा० का २$\frac{३}{४}$ गुना निकालने के लिए हमें इस रक़म के ३ गुने से इसी का $\frac{१}{४}$ घटा देना चाहिए। इस प्रकार :—

रु०	आ०	पा०	
८३	५	७	
		३	
२५०	०	९	= ८३ रु० ५ आ० ७ पा० का ३ गुणा
२०	१३	$४\frac{३}{४}$	= ,, ,, ,, ,, $\frac{१}{४}$
२२९	३	$४\frac{१}{४}$	= ,, ,, ,, ,, $२\frac{३}{४}$

नोट—इस उदाहरण के हल करने के लिए यहीं रीति सबसे उत्तम है। इस रीति का प्रयोग केवल उसी दशा मे किया जा सकता है जब कि भिन्न का अंश उसके हर से केवल १ कम हो।

पहिली रीति उस दशा में लाभदायक होती है जब कि भाग पूरा पूरा हो जाता है और शेष कुछ भी नहीं बचता।

उदाहरण २ – ३ मन ३४ सेर का $\frac{३}{४}$ + ८ मन ९ सेर का $\frac{३}{७}$ + ३ सेर १२ छटाँक का $\frac{२}{५}$ का मान निकालो।

अभीष्ट मान = $\frac{३\ म०\ ३४\ से०}{४} \times ३ + \frac{८\ म०\ ९\ से०}{७} \times ३ + \frac{३\ से०\ १२\ छ०}{५} \times २$

= ३८ से० ८ छ० × ३ + १ म० ७ से० × ३ + १२ छ० × २

= २ म० ३५ से० ८ छ० + ३ म० २१ से० + १ से० ८ छ०

= ६ मन १८ से०

अभ्यास—४० (ज़बानी)

निम्नलिखित भिन्नों के मूल्य बताओ :—

(१) ५ रु० का $\frac{३}{१०}$। (२) ४ रु० १२ आ० का $\frac{३}{४}$।

(३) ५ म० ३० से० का $\frac{५}{६}$। (४) ६ ग० २ फ़ी० का $\frac{१}{४}$।

(५) १ घं० ३० मि० का $\frac{४}{१८}$ । (६) २ फ़ी० ८ इंच का $\frac{५}{८}$ ।

(७) ३ रु० १२ आ० का १$\frac{१}{३}$ । (८) २ रु० ८ आ० का २$\frac{४}{८}$ ।

(९) ३ से० ९ छ० का $\frac{१}{३}$ + ५ से० १० छ० का $\frac{३}{१०}$ ।

(१०) २ रु० ४ आ० का $\frac{४}{७}$ − १ रु० १२ आ० का $\frac{४}{५}$ ।

(११) एक बरतन में ५ से० १० छ० दूध आता है। यदि उसका केवल [illegible] दूध से भरा हुआ हो तो बताओ उसमें कितना दूध है।

(१२) किसी कक्षा मे २४ लड़के हैं जिनके $\frac{३}{८}$ एक दिन अनुपस्थित थे। बताओ उस दिन कितने लड़के कक्षा में उपस्थित थे।

(१३) रमाकान्त की ऊँचाई महेशप्रसाद की ऊँचाई का $\frac{६}{७}$ है। यदि महेशप्रसाद की ऊँचाई १ ग० २ फ़ी० ३ इं० हो तो रमाकान्त की ऊँचाई क्या होगी ?

(१४) कक्षा ४ के लड़के पाठशाले के समय का $\frac{४}{१८}$ भाग भाषा सीखने में लगाते हैं। यदि पाठशाला १० बजे से ३ बजे तक लगती हो तो ये लड़के प्रतिदिन भाषा सीखने में कितना समय लगाते हैं ?

(१५) एक आदमी अपने धन का $\frac{५}{१०}$ भाग खर्च करने पर उसे मालूम हुआ कि अब उसके पास कुल २ रु० ४ आ० रह गया। बताओ पहले उसके पास कितना धन था।

अभ्यास ४१

मूल्य बताओ : —

(१) ५१ रु० ४ आ० का $२\frac{३}{८}$ (२) १८८ रु० ८ आ० का $४\frac{७}{९}$

(३) ४३९९ रु० २ आ० का $७\frac{१}{३}$

(४) १०१८ रु० ११ आ० ४ पा० का $३\frac{१}{२३}$

(५) १७३ रु० १२ आ० १० पा० का $४\frac{५}{८७}$

(६) ३२२ रु० १३ आ० ४ पा० का $२\frac{१३}{१५}$, लगभग पूरी पाइयों तक।

(७) ३ मन १० सेर ८ छ० का $३\frac{११}{२४}$

(८) ३६१ रु० ६ आ० का $\frac{१}{४\frac{१}{५}}$

(९) १५ रु० १२ आ० का $\frac{३\frac{१}{७}}{१\frac{२}{९}}$

(१०) २ मन ३२ सेर के $३\frac{१०}{२८}$ का $\frac{१}{२}$

(११) १० रु० का $\frac{३}{२४}$ + १ रु० ४ आ० का $\frac{४}{५}$ + १० रु० ८ आ० का $\frac{३}{७}$

(१२) ५ रु० ४ आ० का $१\frac{७}{९}$ − १ रु० ४ आ० का $\frac{३}{४}$ + १० रु० का $\frac{१}{१२}$ − १० रु० ८ आ० का $\frac{१}{१४}$

(१३) ५ आ० १० पा० के $१\frac{३}{४}$ का $२\frac{२}{५}$ + ३ आ० के $\frac{३}{१४}$ के $१\frac{१०}{११}$ का $३\frac{२}{३}$

(१४) १२ रु० ८ आ० के $३\frac{१}{२}$ का $१\frac{३}{४}$ + ६ रु० १० आ० ८ पा० का $\frac{५}{७}$ − $३\frac{१}{३}$ रु० के $१\frac{५}{६}$ का $\frac{३}{५}$, लगभग पूरी पाइयों तक।

(१५) ७ रु० का $\frac{५}{१८}$ + ३ रु० ४ आ० का $\frac{३}{१६}$ + १ रु० १२ आ० ४ पा० का $\frac{३}{१०}$ − ४ रु० ० आ० ४ पा० का $\frac{१}{५}$, लगभग पूरी पाइयों तक।

(१६) १० रु० के $२\frac{१}{५}$ के $७\frac{१}{२०}$ का $३\frac{५}{८}$ + ८ आ० के $९\frac{३}{५}$ का $३\frac{४}{९}$ + ८ पा० के $८\frac{१}{४}$ का $४\frac{१}{४}$, लगभग पूरी पाइयों तक।

(१७) मैं २४ रु० लेकर बाज़ार गया। उसका $\frac{१}{६}$ मैंने एक दूकान पर और बाक़ी रुपये का $\frac{३}{५}$ दूसरी दूकान पर ख़र्च किया। बताओ अब मेरे पास कितना धन बाक़ी रहा।

(१८) एक घोसी के पास १ मन ३० सेर दूध था। उसने कुल दूध का $\frac{३}{५}$ एक आदमी के हाथ और बाक़ी दूध का $\frac{३}{८}$ दूसरे आदमी के हाथ बेचा। तो बताओ अब उसके पास कितना दूध बाक़ी बच रहा।

(१९) एक घर में तीन भाइयों की सालाना आमदनी १५०० रु० है। यदि इस धन का $\frac{९}{२५}$ बड़े भाई को और $\frac{१३}{३०}$ मँझले भाई की आमदनी हो तो छोटे भाई की सालाना आमदनी बताओ।

(२०) एक आदमी अपनी सालाना आमदनी का $\frac{३}{२१}$ खाने पीने में, $\frac{३}{१६}$ कपड़ों में और बाक़ी का $\frac{१०}{४१}$ दूसरे कामों में ख़र्च करता है। तो बताओ उसकी सालाना बचत क्या होगी अगर उसकी सालाना आमदनी १६०० रु० हो।

किसी भिन्न या राशि को दूसरी भिन्न या राशि की भिन्न में प्रकट करना—यह समझने के लिए निम्नलिखित उदाहरण पर ध्यान दो :—

उदाहरण १—मान लो कि हमसे यह प्रश्न किया जावे कि ४ आना १ रुपये की कौन-सी भिन्न है? इस प्रश्न का अभिप्राय यह है कि १ रु० को कौन-सी भिन्न से गुणा करें कि गुणनफल ४ आ० हो जावे। इससे यह मालूम हुआ कि यहाँ हमें ४ आ० को १ रु० से भाग देने पर उत्तर मिलेगा। इस प्रकार ४ आ०

$$\div १ \text{ रु०} = ४ \text{ आ०} \div १६ \text{ आ०} = \frac{४ \text{ आ०}}{१६ \text{ आ०}} = \frac{१}{४}$$

चूँकि १ रु० का $\frac{१}{४}$ = ४ आ०, इसलिए मालूम हुआ कि उत्तर शुद्ध है।

उदाहरण २—४$\frac{१}{८}$, १५$\frac{३}{४}$ की कौन-सी भिन्न है?

इस प्रश्न का यह अर्थ है कि १५$\frac{३}{४}$ को किस भिन्न से गुणा करें कि गुणनफल ४$\frac{१}{८}$ हो जाय। इसलिए हमको ४$\frac{१}{८}$ को १५$\frac{३}{४}$ से भाग दे कर लब्धि निकालना है।

अतः अभीष्ट भिन्न $= ४\frac{१}{५} \div १५\frac{३}{४}$

$$= \frac{४\frac{१}{५}}{१५\frac{३}{४}} = \frac{\frac{२१}{५}}{\frac{६३}{४}} = \frac{\cancel{२१}}{५} \times \frac{४}{\underset{३}{\cancel{६३}}} = \frac{४}{१५}$$

ऐसे ही और उदाहरणों की सहायता से तुम निम्नलिखित नियम निकाल सकते हो :—

किसी भिन्न या राशि को दूसरी भिन्न या राशि की भिन्न में लाने के लिए हमें एक ऐसी भिन्न निकालनी चाहिए जिससे दूसरी राशि या भिन्न को गुणा करने पर गुणनफल पहिली भिन्न या राशि के बराबर हो जाय। इससे यह स्पष्ट है कि पहिली भिन्न या राशि को दूसरी से भाग देने पर इष्ट भिन्न मिलेगी। इसलिए पहिली भिन्न या राशि को अंश और दूसरी भिन्न या राशि के हर बनाने पर जेा नई भिन्न बनती है उसको सरल कर लेने पर अभीष्ट भिन्न मिल जाती है, और इस प्रकार उत्तर सदा साधारण भिन्न में आता है। यहाँ यह स्मरण रखना चाहिए कि पहिली राशि को दूसरी से भाग देने के पहिले दोनों राशियों को एक जाति की बना लेनी चाहिए।

उदाहरण ३—४ रु० ६ आ० को ८ रु० ५ आ० ४ पा० की भिन्न में लाओ।

$$\text{अभीष्ट भिन्न} = \frac{\text{४ रु० ६ आ०}}{\text{८ रु० ५ आ० ४ पा०}} = \frac{४\frac{३}{८}\text{ रु०}}{८\frac{१}{३}\text{ रु०}} = \frac{\frac{३५}{८}}{\frac{२५}{३}}$$

$$\underset{७}{}$$

$$= \frac{\text{३५}}{\text{८}} \div \frac{\text{२५}}{\text{३}} = \frac{\text{३५}}{\text{८}} \times \frac{\text{३}}{\text{२५}} = \frac{\text{२१}}{\text{४०}}$$

दोनों राशियों को रुपयों के बदले आनों में या पाइयों में प्रकट करने पर भी वही उत्तर आवेगा। इस प्रकार:—

$$\text{अभीष्ट भिन्न} = \frac{\text{४ रु० ६ आ०}}{\text{८ रु० ५ आ० ४ पा०}} = \frac{\text{७० आ०}}{\text{१३३}\frac{\text{१}}{\text{३}}\text{ आ०}}$$

$$= \frac{\text{७०}}{\frac{\text{४००}}{\text{३}}} = \text{७०} \times \frac{\text{३}}{\text{४००}} = \frac{\text{२१}}{\text{४०}}$$

किसी दिये हुए प्रश्न में राशियों के रूपान्तर करते समय जिस प्रकार के रूपान्तर मे सुगमता और शीघ्रता हो उसी प्रकार के रूपान्तर को काम में लाना चाहिए। प्राय: पहिली रीति में ही सुगमता होती है।

उदाहरण ४—१२६ गज़ २ फ़ीट ६ इंच को १ मील की भिन्न मे लाओ।

यहाँ दोनों राशियों को गज़ों में रूपान्तर करते हैं।

इस प्रकार १२६ गा० २ फी० ६ इ० = १२६ ग० २$\frac{\text{१}}{\text{२}}$ फ़ी०

$$= \text{१२६}\frac{\text{५}}{\text{६}}\text{ ग०}$$

और १ मील = १७६० ग०

$$\text{अत: अभीष्ट भिन्न} = \frac{\text{१२६}\frac{\text{५}}{\text{६}}\text{ ग०}}{\text{१७६० ग०}} = \frac{\frac{\text{७६१}}{\text{६}}}{\text{१७६०}}$$

$$= \frac{\text{७६१}}{\text{६}} \times \frac{\text{१}}{\text{१७६०}} = \frac{\text{७६१}}{\text{१०५६०}}$$

अभ्यास ४२ (ज़बानी)

(१) २ आ०, ६ आ०, १० आ० और १२ आ०, एक रुपये की कौन-सी भिन्न हैं ?

(२) ५ आ० ४ पा०, १० आ० ८ पा०, १ आ० ४ पा० और २ आ० ८ पा० एक रुपये की कौन-सी भिन्न हैं ?

(३) ४ इं०, ६ इं०, ९ इं० और १ फु० ६ इं० एक गज़ की कौन-सी भिन्न हैं ?

(४) २$\frac{१}{२}$ सेर, १० सेर और २५ सेर एक मन के कौन-से भाग हैं ?

(५) २ पा०, ४ पा०, ३ पा०, ६ पा० और ९ पा० को आने की भिन्नों में प्रकट करो।

(६) २० मिनट, २५ मि०, ४० मि० और १ मि० ३० सं० को १ घंटे की भिन्नों में प्रकट करो।

(७) १ आ०, ६ आ०, को ४ पा० की और २ आ० ६ पा० को ३ आ० की भिन्न में प्रकट करो।

(८) ६ छटाँक, १० छटाँक, १२ छटाँक और १४ छटाँक में से प्रत्येक २ सेर की कौन-सी भिन्न है ?

(९) वह कौन-सी सख्या है जिसका $\frac{५}{८}$, ४० है ?

(१०) वह कौन-सा धन है जिसका $\frac{५}{६}$, १५ रु० है ?

(११) यदि मैं प्रतिदिन १० घ० पढ़ने में व्यतीत करूँ तो मैं एक दिन की कौन-सी भिन्न पढ़ने में व्यतीत करता हूँ ?

(१२) मेरे पास ८० रु० थे और उनमें से मैंने ३२ रु० खर्च कर दिये। तो बताओ अब मेरे पास कुल धन की कौन-सी भिन्न रह गई।

(१३) रु० २० का कौन-सा भाग १३ रु० ५ आ० ४ पा० के बराबर है ?

(१४) २ मील ४ फ० चलने पर हमें मालूम हुआ कि हमें अभी ३ मील ४ फ० और चलना बाक़ी है। तो बताओ कुल यात्रा का कौन-सा भाग अभी चलना बाक़ी है।

(१५) यदि किसी धन का $\frac{३}{२०}$ भाग ६ रु० के बराबर हो तो उसी धन का $\frac{७}{१६}$ भाग कितने के बराबर होगा।

अभ्यास ४३

(१) २ रु० १२ आ० को १० रु० ८ आ० की भिन्न में प्रकट करो।

(२) १०२ रु० १० आ० ८ पा० को ११३ रु० ३ आ० ४ पा० की भिन्न में प्रकट करो।

(३) ६ रु० १ आ० को १४ रु० १० आ० ६ पा० की भिन्न में लाओ।

(४) २६ रु० १३ आ० ६ पा० को ३६ रु० १२ आ० की भिन्न में लाओ।

(५) $८\frac{१}{२}$ सेर को २१ से० ४ छटाँक की भिन्न में लाओ।

(६) २ मन को ५ मन २० सेर ८ छ० की भिन्न में लाओ।

(७) १ मन ४ सेर, २ मन ३२ सेर की कौन-सी भिन्न है ?

(८) एक दिन का ३$\frac{३}{७}$, २ सप्ताह को कौन-सी भिन्न है।

(९) २० सप्ताह ६ दिन, एक वर्ष की कौन-सी भिन्न है ?

(१०) ५ सेर १ छटाँक को एक मन की भिन्न में लाओ।

(११) (४$\frac{३}{४}$ रु० – ६ रु० का $\frac{२}{३}$), ३ रु० ४ आ० के $\frac{२}{३}$ की कौन-सी भिन्न है।

(१२) २ मन ६ सेर के १$\frac{१}{४}$ के $\frac{४}{५}$ को २० मन के $\frac{१}{४}$ की भिन्न में लाओ।

(१३) ६ मन ९ सेर ९ छटाँक के $\frac{२}{३}$ का कौन-सा भाग २ मन १० सेर ८ छ० है ?

(१४) ७ घंटा २८ मि० १४ सेकंड का $\frac{२}{७}$, १९ घंटा १२ मि० ३६ से० में कितनी बार शामिल है ?

निम्नलिखित को सक्षेप करो :—

(१५) $\frac{\text{२४ रु० १० आ० का } \frac{५}{१४}}{\text{५८ रु० १२ आ० का } \frac{४}{१५}}$ ।

(१६) $\frac{\text{८ म० २५ से० का } \frac{३}{५}}{\text{६५ म० २५ से० } \div \text{ ८} \frac{१}{३}}$ ।

(१७) २ रु० ६ आ० ६ पा० में ८ रु० १२ आ० की कौन-सी भिन्न जोड़ दें कि जोड़ ५ रु० ११ आ० ९ पा० हो जाय ?

(१८) ५६ रु० ४ आ० का कौन-सा भाग ३० रु० का $\frac{५}{१२}$ के बराबर है ?

निम्नलिखित प्रश्नों मे जो अक छूट गये हैं उनको लिखो :—

(१९) $\frac{\text{२ म० ४ से० ८ छ०}}{\text{२ म० ५ से० ६ छ०}} + \frac{\cdots}{\text{५५}} = \text{१}$

(२०) $\frac{\text{५ रु० ५ आ०} \div \text{४}\frac{\text{१}}{\text{४}}}{\text{९ रु० ५ आ० ४ पा० का } \frac{\text{३}}{\text{७}}} + \frac{\cdots}{\text{१६}} = \text{२}$

अभ्यास—४४

भिन्नों पर स्फुटिक प्रश्नावली

(१) १$\frac{१}{३}$ के ४$\frac{१}{२}$ मे कौन-सी संख्या जोड़ी जावे कि जोड़ ८ हो ?

(२) २$\frac{२}{३}$ को किस संख्या में से घटावे कि ५$\frac{१}{६}$ का $\frac{५}{१३}$ ÷ २$\frac{२}{१५}$ शेष बचे ?

(३) किस संख्या में $\frac{४}{५}+\frac{३}{१०}$ का गुणा करे कि गुणनफल $\frac{१५}{१६}+\frac{३}{४}+\frac{१}{४}$ हो ?

(४) $\frac{५}{२}$ और $\frac{१}{३}$ के जोड़ में इन्हीं का अन्तर कितनी बार सम्मिलित है ?

(५) यदि भाजक $\frac{२}{३}$ हो और भागफल, भाजक का $\frac{६}{७}$ हो तो भाज्य बताओ।

(६) एक मनुष्य ने अपने धन का $\frac{५}{७}$ खर्च करने के अनन्तर देखा कि शेष धन का $\frac{२}{११}$ भाग ३२४ रु० के बराबर है। तो बताओ पहिले उसके पास कितना धन था।

(७) एक घोड़ा और जीन दोनों का मूल्य १०५ रु० है, यदि घोड़े का मूल्य जीन के मूल्य का ६½ गुना हो तो घोड़े और जीन का अलग अलग मूल्य निकालो।

(८) किसी धन का ५/१२ अनन्त को, २/९ बसन्त को और शेष सन्त को मिला। यदि सन्त को ८६ रु० मिले हों तो बसन्त को क्या मिला ?

(९) एक मनुष्य अपनी आय का १/१० दान में और १/१५ मालगुजारी में देता है। यदि उसके पास ४०६ रु० बच रहते हों तो बताओ उसकी पूरी आय कितनी है।

(१०) एक मनुष्य के पास जो कुछ थैली में था उसका ३/४ खर्च कर दिया, और जो कुछ बचा उसका ४/९ लुटा दिया, यदि अब उसके पास २० रु० बच रहे हों तो पहिले कितना था ?

(११) यदि किसी धनसंख्या से उसका ग्यारहवाँ भाग निकाल दें तो १०० रु० बच रहते हैं। वह धनसंख्या बताओ।

(१२) एक मनुष्य, जिसकी साप्ताहिक आय ७० रु० है, दो सप्ताह में इस धन का ३/७ बचाता है। बताओ वह १२० रु० कितने समय में बचायेगा।

(१३) एक मनुष्य अपनी सम्पत्ति का पाँचवाँ भाग अपने बड़े बेटे के लिए छोड़ गया और शेष चार बेटों में से प्रत्येक के लिए छठवाँ भाग, और शेष १०००० रु० की वसीयत कर गया। उसकी कुल सम्पत्ति कितने की थी ?

(१४) कपड़े का एक थान १९$\frac{७}{२४}$ गज़ लम्बा है। इसमें से एक ग्राहक ने ४$\frac{११}{१२}$ गज़ और दूसरे ने ११$\frac{७}{८}$ गज़ ले लिया, तो कितना कपड़ा शेष रहा ?

(१५) एक बनिये के पास ७$\frac{५}{१६}$ सेर और ५$\frac{३}{४}$ सेर घी बेचने के पीछे २$\frac{१}{४}$ सेर शेष रहा, तो पहिले उसके पास कुल कितना घी था ?

(१६) ४०$\frac{५}{३}$ गज़ लम्बे एक थान में से तुम्हारे पिता ने थान का $\frac{१०}{१७}$ भाग मोल लिया, तो उन्होंने कितने गज़ कपड़ा लिया और कितना शेष रहा ?

(१७) कुछ गेहूँ का $\frac{३}{४}$ भाग बेचने के अनन्तर शेष का $\frac{१}{२}$ तोलने से ज्ञात हुआ कि वह १$\frac{१}{२}$ मन है, तो पहिले कितना गेहूँ था ?

(१८) मैंने कुछ रुपया ३ लड़कों में बाँटा, पहिले को कुल का $\frac{१}{३}$, दूसरे को शेष का $\frac{१}{६}$ और शेष तीसरे को दिया जो १ रुपया था, तो मैंने कुल कितना रुपया बाँटा ?

(१९) एक लड़के की जेब में ३ रु० का $\frac{५}{१२}$ है, दूसरे की जेब में २ रु० १३ आ० का $\frac{७}{१५}$ है। तो एक के पास दूसरे से कितना अधिक है ?

(२०) एक बजाज़ को ८ रु० १२ आ० देने के पीछे तुम्हारे पिता के पास उनके धन का $\frac{३}{८}$ शेष रहा, तो पहिले उनके पास कितना था ?

(२१) तुम्हारे पिता के कुछ रुपयों का आधा डाकखाने के सेविंग बैंक में है, एक तिहाई संदूक में है और ३० रु० जेब में हैं। तो उनके पास कुल कितने रुपये हैं ?

(२२) एक बाँस का पाँचवाँ भाग कीचड़ में, $\frac{१}{३}$ पानी में और १४ फ़ुट पानी के ऊपर था। उस बाँस को लम्बाई बताओ।

(२३) किस भिन्न को $\frac{२३}{३०}$ का $\frac{१४}{१५}$ का $\frac{५}{६}$ में जोड़ें कि जोड़ १ हो ?

(२४) $१\frac{५}{६} - २\frac{१}{६} + ३\frac{७}{१२}$ और $\frac{१८}{१५}$ का गुणनफल निकालो।

(२५) जोड़ो २८ दिन के महीने का $\frac{१३}{२१}$, एक सप्ताह का $\frac{३७}{२४}$, एक दिन का $\frac{१७}{१८}$, और एक घंटे का $\frac{९}{२०}$।

(२६) एक आदमी ने अपनी कुल जायदाद तीन बेटों में बाँट दी, कुल का $\frac{१३}{२०}$ बड़े को, कुल का $\frac{१}{८}$ छोटे को, और २७५० रु० मँझले बेटे को दिया। उसकी कुल जायदाद कितने की थी ?

(२७) अगर एक कोट में $२\frac{१}{२}$ गज़ कपड़ा, एक वास्कट में $\frac{११}{१६}$ गज़ कपड़ा, और एक पायजामे में $१\frac{१}{४}$ गज़ कपड़ा लगे, तो $३२\frac{१}{२}$ गज़ के थान में से कितने सूट बन सकते हैं ? (एक सूट में एक कोट, एक वास्कट और एक पायजामा शामिल होता है।)

(२८) एक हौज़ का $\frac{४}{५}$ पानी से भरा है, और जब कि ३२ मन पानी निकाल लिया तो उसका $\frac{४}{९}$ भरा रह गया। उस हौज़ में कितने मन पानी आता है ?

(२९) $३\frac{१}{५} - २\frac{७}{८} + ४\frac{७}{१०}$ में कितना जोड़ें कि $८\frac{१}{३}$ हो जावे ?

(३०) जिस बर्त्तन में ४३$\frac{१}{३}$ छटाँक दूध समाता है वह बर्त्तन दूसरे बर्त्तन में से जिसमें ४८$\frac{४}{११}$ पाव समाता है, कितनी बार भरा जा सकता है ?

अभ्यास—४२

विविध उदाहरण

(१) ३०७१८९५ मे ७, ८, और ५ का स्थानीय मान इस सख्या से कितना कम है ?

(२) एक आदमी २५६० रुपये लेकर बाजार गया और ७ रु० ८ आ० प्रतिमन की दर से ३१७ मन चावल खरीदे। तो बताओ जब वह घर लौटा तो उसके पास कितना धन शेष रहा।

(३) ८७ रुपये प्रतिगाय की दर से ७८१०१ रुपयों में तुम कितनी गायें खरीद सकते हो ?

(४) २०, ३५, ५६, और ६४ में से प्रत्येक के अभाज्य गुणनखण्ड निकालो और वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात करो जो इनमें से प्रत्येक से भाग देने पर पूरी पूरी विभाजित हो जाय और शेष कुछ न रहे।

(५) वह कौन-सी संख्या है जिसको यदि $\frac{४}{५}+\frac{३}{१०}$ से गुणा करें तो गुणनफल $\frac{१५}{१६}+\frac{३}{४}+\frac{३}{४}$ हो ?

(६) १६८, २७० और ४१५ का लघुतम समापवर्त्य निकालो।

(७) वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात करो जो १९ से विभाज्य हो और ६७८० से बड़ी हो।

(८) दो संख्याओं का जोड़ ८९७६३२ है और बड़ी संख्या २३४५६ की २७ गुना है। तो छोटी संख्या बताओ।

(९) यदि एक बोरे में २ मन १५ सेर ७ छटाँक गेहूँ आता है तो २३५६ मन २३ सेर ८ छटाँक गेहूँ मे से ऐसे कितने बोरे भरे जा सकते हैं ?

(१०) सरल करो:—

३ रु० १३ आ० ६ पा० का २$\frac{३}{३}$ + ६ रु० २ आ० ९ पा० का १$\frac{३}{८}$ + ८ रु० ५ आ० का ३$\frac{३}{७}$।

(११) वह छोटी से छोटी संख्या बताओ जिसको यदि ८८, ९९, और १३२ से भाग दें तो प्रत्येक दशा में ७ शेष रहे।

(१२) भाजक ६३४ है, लब्धि १७ है और शेष १३१ है। तो भाज्य क्या है ?

(१३) एक लट्ठे का $\frac{२}{७}$ मिट्टी में गड़ा है, [illegible] पानी मे है, और ४ फीट पानी से ऊपर है। तो लट्ठे की लम्बाई कितनी है ?

(१४) रमेश के पास ५६५ रुपये हैं और अबदुल्ला के पास ७८९ रुपये हैं। तो बताओ कि अबदुल्ला रमेश को कितने रुपये दे जिससे दोनों के पास बराबर धन हो जाय।

(१५) $\frac{२}{७}$ और $\frac{३}{५}$ के जोड़ में इनका अन्तर कितनी बार शामिल है ?

(१६) ३७०८९७६ और ३८०७९७६ में ८ के मान में अन्तर बताओ और यह भी बताओ कि प्रत्येक मान दूसरे का कै गुना है।

(१७) १२६, २२२ और ३७८ के अभाज्य गुणनखण्ड निकालो और वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात करो जो इनमें से प्रत्येक से विभाज्य है।

(१८) २९६०५ रुपयों को दो आदमियों में इस प्रकार बाँटो कि एक को दूसरे का $\frac{२}{३}$ मिले।

(१९) इनके गज़ बनाओ :—

$\frac{३}{८}$ मील, $२\frac{७}{२}$ मील और $\frac{३}{७}$ मील।

वह छोटी से छोटी लम्बाई गज़ों में ज्ञात करो जो कि उपरोक्त तीनों भिन्नों से पूरी पूरी विभाज्य हो।

(२०) एक मकान $\frac{३}{५}$ भाग २३४० रुपये मे बिका तो उसका $\frac{५}{६}$ भाग कितने में बिकेगा ?

(२१) यदि ४७७७ को इस संख्या मे ७ के प्रत्येक मान के लगातार गुणनफल में से जितनी बार सभव हो उतनी बार घटावे तो क्या शेष रहेगा ?

(२२) यदि १४ जोड़े धोती के दाम ३६ रु० १४ आ० हों तो ऐसे ३४ जोड़ों के क्या दाम होंगे ?

(२३) ५० और २५० के बीच में २४ के कौन कौन से अपवर्त्य हैं ?

(२४) यदि एक पारसल में ९ किताबें हों और प्रत्येक का भार ७ छटाँक हो तो ऐसे ३९ पारसलों का कितना भार होगा ?

(२५) ३५ फ़ीट लम्बी रस्सी में से $३\frac{३}{४}$ फ़ीट लम्बे जितने टुकड़े काटे जा सकते थे काट लिये गये। तो बताओ कि शेष प्रत्येक टुकड़े की कौन-सी भिन्न है ?

(२६) १६३ रुपये को ३ आदमियों में इस प्रकार बाँटो कि पहिले आदमी को दूसरे से ८ रुपये और दूसरे को तीसरे से १० रुपये अधिक मिलें।

(२७) मैंने अपने धन का $\frac{३}{५}$ भाग पहिले और फिर शेष का $\frac{३}{४}$ दे डाला। तो बताओ कि कुल का कितना भाग शेष रहा।

(२८) तीन रेलगाड़ियाँ ३०, ४० और ४५ मील प्रतिघंटे की चाल से दौड़ती हैं। वह छोटी से छोटी दूरी बताओ जिसको तय करने में प्रत्येक रेलगाड़ी को पूरे पूरे घंटे लगेंगे।

(२९) २३४५६७ को ३२८५६ से तीन पंक्तियों में गुणा करो।

(३०) सरल करो :—

$६\frac{६}{७} + ३\frac{३}{७} \div \frac{५}{७}$ का $(\frac{३}{५} - \frac{१}{४})$

(३१) एक मनुष्य एक हफ़्ते में ३ रु० ५ आ० ४ पा० कमाता है। बताओ उसे प्रतिसप्ताह कितना ख़र्च करना चाहिए जिससे वह एक साल में १०० रु० १२ आने बचा ले।

(३२) वह संख्या कौन-सी है जिसका $\frac{१}{१२}$ उसके $\frac{१}{१८}$ से ४ अधिक है?

(३३) ३१ सेर १ छ० ७ मन ३० सेर १० छटाँक की कौन-सी भिन्न है?

(३४) अकाल के समय में एक धनी मनुष्य ने १००० मन चावल बाँटे। २००० ग़रीबों को ५ सेर के हिसाब से और शेष ७ सेर ८ छटाँक के हिसाब से मिले। तो बताओ कुल कितने ग़रीब थे।

(३५) मान बताओ —

$५\frac{१}{२}$ मन + $४\frac{१}{६}$ मन − $३\frac{१}{७}$ मन।

(३६) यदि एक घोडा $५\frac{१}{२}$ घण्टे मे $५५\frac{१}{१०}$ मील दौड सकता है तो बताओ कि एक सेकण्ड मे वह कितने गज जाता है ?

(३७) वह छोटी से छोटी सख्या ज्ञात करो जिसको यदि ११२, १२८ और १४४ से भाग दे तो प्रत्येक दशा मे ९ शेष रहे।

(३८) एक सख्या मे लगातार ३,५ और ११ का भाग देते हैं तो शेष क्रम से १,२ और ३ रहता है तो बताओ कि यदि उस सख्या मे ३,५ और ११ के लगातार गुणनफल मे भाग दे तो क्या शेष रहेगा ?

(३९) एक बनिये ने ३२ मन चावल ७ रु० ६ आ० ६ पा० प्रति-मन की दर से और ५१ मन ६ रु० ५ आ० ४ पा० प्रतिमन की दर से खरीदे और उनको मिला दिया। तब उसने ८३ मन चावल ६०१ रु० ८ आ० को बेच डाले। तो बताओ उसको प्रतिमन क्या लाभ हुआ।

(४०) एक मनुष्य एक मकान के $\frac{४}{५}$ भाग का मालिक था। उसने अपने भाग के $\frac{२}{३}$ को ६७४ रु० ८ आ० मे बेच डाला तो बताओ कि कुल मकान कितने मे बेचा जा सकता था।

(४१) यदि एक घोडे के लिए रोजाना $३\frac{१}{२}$ सेर चने की जरूरत होती है तो ९१ मन ३५ सेर चने कितने घोड़ों को एक दिन के लिए काफी होंगे ?

(४२) १२५० की कौन-सी भिन्न इस सख्या मे से घटा दे कि शेष २३ से पूरा विभाज्य हो जाय ?

(४३) वह छोटी से छोटी सख्या बताओ जिसमे यदि २३ जोड दे तो २५,३५, और ४९ से पूरी पूरी विभाज्य हो जाय।

(४४) सरल करो —

२ मन ५ सेर ७ छटाँक ३ मन १७ सेर ९ छटाँक
५ मन १६ सेर ५ छटाँक १२ मन ३० सेर ४ छटाँक

(४५) एक डण्डे का $\frac{१}{३}$ भाग लाल, $\frac{१}{४}$ पीला, $\frac{१}{}$ हरा, $\frac{१}{६}$ नारङ्गी और शेष जो कि ९ फीट है नीला रँगा हुआ है तो डण्डे की लम्बाई बताओ।

(४६) नारङ्गियों की वह छोटी से छोटी सख्या बताओ जो कि ४ लडको मे (बिना किसी नारङ्गी को काटे हुए) इस प्रकार बाँटी जा सकती है कि पहिले को कुल का $\frac{१}{३}$, दूसरे को $\frac{३}{७}$, तीसरे को $\frac{४}{१}$, और चौथे को शेष नारङ्गियाँ मिले।

(४७) मान बताओ — १५ रु० १५ आ० का

$$\left(\frac{२ \text{ रु० } २ \text{ आ० } ६ \text{ पा०}}{३ \text{ रु० } ३ \text{ आ० } ९ \text{ पा०}} - \frac{२ \text{ सेर } ७ \text{ छटाँक}}{९ \text{ सेर } १२ \text{ छटाँक}}\right)$$

(४८) एक मनुष्य अपनी आमदनी का $\frac{३}{३}$ अपने कुटुम्ब पालने में और शेष का $\frac{५}{८}$ दान मे खर्च करता है और ७५० रुपये बचा लेता है। तो उसकी आमदनी कितनी है ?

(४९) सरल करो —

(अ) $१५\frac{१}{२} - \left[४\frac{१}{३} + \left\{१\frac{३}{४} - \frac{१}{२}\left(२\frac{१}{३} - १\frac{२}{५} - \frac{३}{३}\right)\right\}\right]$

(ब) $\frac{२\frac{१}{६} - ३\frac{२}{५} \text{ का } २\frac{१}{२}}{३\frac{२}{५} \text{ का } २\frac{१}{३} - २\frac{१}{६}} \div \frac{१\frac{१}{२} \text{ का } ४\frac{१}{९} \div ९\frac{१}{४}}{१\frac{१}{७} - \text{का } (\frac{२}{५} + \frac{१}{७} - \frac{१}{९})}$

(५०) मरते समय एक मनुष्य ने अपने धन का $\frac{१}{३}$ अपनी स्त्री को और शेष बराबर बराबर अपने चार लड़कों में बाँट दिया। यदि प्रत्येक लड़के को २६९४ रु० ६ आ० ६ पा० का माल मिला तो उसकी स्त्री के माल की क्या क़ीमत होगी।

दूसरा भाग

अध्याय १

(दोहराने के लिए अभ्यास)

संख्याओं का लिखना, पढ़ना और चारों साधारण नियम

अभ्यास १

(१) १९२५३०४ में ५ का मान ९ के मान में कितनी बार शामिल है ?

(२) यदि ५ अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या में ५ अंकों की छोटी से छोटी संख्या का भाग दें तो क्या शेष रहेगा ?

(३) दो संख्याओं का अन्तर १३२५४६ है और बड़ी संख्या ६४५२३१ है। तो छोटी संख्या बताओ।

(४) ३२८७ को ७६५४३२१ में से जितनी बार संभव हो, घटाओ और शेष निकालो।

(५) वह कौन-सी संख्या है, जिसको यदि ३१७ और २३२५ के गुणनफल मे से घटावें तो शेष ७१३ से विभाज्य हो जाय ?

(६) एक संख्या में लगातार ३, ५ और ७ का भाग दिया गया। यदि शेष क्रम से २, ३, और ४ हों और अन्तिम लब्धि ९ हो तो संख्या बताओ।

(७) बिना गुणा किये हुए १२३४५६ और १२५ का गुणनफल बताओ।

(८) ५६७८९ को १८९७२ से तीन पंक्तियों में गुणा करो।

(९) भाग के एक प्रश्न में भाजक लब्धि का ५ गुना और शेष का ७ गुना है। यदि शेष २५ है तो भाज्य क्या होगा ?

(१०) ऐसी संख्या ज्ञात करो जिसमें यदि ३ जोड़ कर २५ से गुणा करें और गुणनफल में ४५ का भाग दें तो लब्धि १० आवे।

चारों मिश्र नियम

अभ्यास २

(१) एक कुँजड़े ने २१० नीबू २ पै० के तीन की दर से, ३१५ नीबू १ आने के पाँच की दर से और २१९ नीबू १ पै० के एक की दर से बेचे। तो बताओ उसने कितने धन का माल बेचा।

(२) यदि एक लड़के को बेञ्च पर बैठने के लिए २ फ़ुट की आवश्यकता होती है तो बताओ कि २५ बेञ्चों पर कितने लड़के बैठ सकते हैं। प्रत्येक बेञ्च की लम्बाई ७ फ़ुट ७ इंच है और सब बेञ्चे एक ही सीध में रक्खी गई हैं।

(३) ३१८ गज लम्बी रस्सी में से ३ गज़ २ फ़ुट ९ इंच लम्बे कितने टुकड़े काटे जा सकते हैं और कितनी रस्सी शेष रहेगी ?

(४) १२१८॥) में २३०) प्रतिघोड़े के हिसाब से तीन घोड़े ख़रीद करने पर ७५॥) प्रतिगाय के हिसाब से तुम कितनी गायें ख़रीद सकते हो ?

(५) एक मनुष्य ६॥) ६ पा० प्रतिदिन कमाता है। तो बताओ कि रोज़ाना वह कितना ख़र्च करे कि एक साल में ९७३।-)४ पा० बचा ले।

(६) यदि ३१५॥)५॥- को २१६ भागों में बाँटें तो कितना शेष रहेगा ?

(७) एक दूकानदार के बाट ४ तोले प्रतिसेर के हिसाब से कम थे। तो बताओ कि ७॥)६ माल बेचने में वह अपने ग्राहकों को कितना धोखा दे देगा ?

(८) बताओ कि एक मनुष्य को साल भर में कितना धन कमाना चाहिए, जिससे वह ३।=)६ पा० प्रतिदिन ख़र्च करके साल के अन्त में १३६४।-)९ पा० बचा ले।

(९) यदि एक बैलगाड़ी के पहिये की परिधि १४ फ़ुट ९ इंच है तो ११ मील ३ फ़रलांग ११५ गज़ चलने में वह कितने पूरे चक्कर लगावेगा ?

(१०) एक बनिये ने २)५॥= घी २० छटाँक प्रतिरुपये की दर से ख़रीदा। उसमें से थोड़ा-सा गाड़ी में बह गया। बचे

हुए को उसने १७ छटाँक प्रतिरुपये की दर से बेच डाला। उसे केवल १॥) का नुक़सान हुआ। तो बताओ कितना घी बह गया।

लघुतम समापवर्त्त्य

अभ्यास ३ (ज़बानी)

निम्नलिखित संख्याओं के सब गुणनखण्ड निकालो :—

(१) १२, १६, २०, ३०, ३६।

इनके रूढ़ गुणनखण्ड निकालो :—

(२) १२, १५, २०, ३०, ४२।

निम्नलिखित संख्याओं के १०० से नीचे के अपवर्त्त्य निकालो :—

(३) ७, ९, १०, १२, १३।

निम्नलिखित संख्याओं के १०० से नीचे के समापवर्त्त्य निकालो :—

(४) २, ५, (५) ३, ६, (६) ४, १२, (७) ३, ४, ६।

इनके लघुतम समापवर्त्त्य निकालो :—

(८) ३, ४, ६, (९) ३, ९, १२, (१०) ४, १६, २०।

(११) वह छोटी से छोटी संख्या बताओ जिसमें यदि ३ और ४ का भाग दें तो प्रत्येक दशा मे १ शेष रहे।

(१२) वह छोटी से छोटी रक़म बताओ जो कि २), ३) और ४) प्रतिलड़के के हिसाब से लड़कों मे बाँटी जा सकती है।

(१३) वह छोटी से छोटी संख्या बताओ, जिसमें २ जोड़ देने पर ४, ५, ६ से बाँटी जा सके।

(१४) एक कुँजड़े के पास डलिया में कुछ अमरूद थे। यदि वह)। के ३,)।। के ५ और)।।। के ७ के हिसाब से बेचे तो उसके पास कुछ नहीं बचता। बताओ कि उसके पास कम से कम कितने अमरूद थे।

(१५) एक मनुष्य ने १ रुपये के १५ की दर से कुछ आम ख़रीदे और उतने ही आम १ रुपये के २० की दर से ख़रीदे। बताओ कि कम से कम उसने कितने आम ख़रीदे।

अभ्यास ४

इनके गुणनखण्ड निकालो :—

(१) १०५, (२) १६५, (३) १९५, (४) ३८५।

पूरे पूरे बँटने की पहचान के नियम की सहायता से निम्नलिखित संख्याओं के गुणनखण्ड निकालो :—

(५) १९८० (६) ७९२ (७) ५४४५ (८) ५९४०।

इनके रूढ़ गुणनखण्ड निकालो :—

(९) ३१५ (१०) ९२५ (११) १२९५ (१२) २०३५।

निम्नलिखित संख्याओं के अपवर्त्य (जो २०० से अधिक न हों) निकालो :—

(१३) २५ (१४) ३५ (१५) ४२।

निम्नलिखित संख्याओं के समापवर्त्य जो ५०० से अधिक न हों निकालो :—

(१६) २४ और ४० (१७) २८ और ३५ (१८) ३५, और ४९।

लघुतम समापवर्त्य निकालो :—

(१९) २०, ३५, ४५, और ६३ (२०) १८, २५, २७ और ३०

(२१) ६, १२, १८, २७ और ८१ (२२) ६३, १८९ और ६९३।

(२३) कपड़े के एक थान में से ३ गज़, ५ गज़, ७ गज़ और ९ गज़वाले टुकड़े फाड़े जा सकते हैं और प्रत्येक दशा मे कुछ शेष न रहेगा। तो बताओ कि थान की लम्बाई कम से कम कितनी होगी।

(२४) यदि एक गल्ले में एक भेड़ और हो तो सब भेड़ें ९, १५ और १८ की पंक्तियों में खड़ी की जा सकती हैं। तो बताओ गल्ले में कम से कम कितनी भेड़ें हैं।

(२५) एक मनुष्य ने कुछ आम एक रुपये के ३५ की दर से और उतने ही और आम एक रुपये के ४२ की दर से ख़रीदे। तो बताओ उसने कम से कम कितने आम ख़रीदे और उनके कितने दाम दिये ?

साधारण भिन्न

अभ्यास ५ (ज़बानी)

(१) मान बताओ :—

(अ) २॥) का $\frac{१}{२}$ (ब) १)८ का $\frac{१}{३}$ (स) ४ गज़ २ .फुट का $\frac{१}{६}$।

(२) $\frac{१}{८}$ की ऐसी समान भिन्न बनाओ जिसमें अंश क्रम से २,३, ४, ५ और ६ हो।

(३) $\frac{१}{९}$ की ऐसी समान भिन्न बनाओ जिनमें हर क्रम से २७, ३६,५४ और ८१ हों।

(४) निम्नलिखित भिन्नों को सम हरवाली भिन्नों में परिवर्तन करो :—

(अ) $\frac{२}{३}$ और $\frac{३}{४}$ (ब) $\frac{३}{४}$, $\frac{३}{८}$, और $\frac{१}{६}$ (स) $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{५}{६}$ और $\frac{११}{१२}$।

(५) $\frac{१}{४}$ रु०, $\frac{१}{८}$ रु० और $\frac{१}{६}$ रु० का जोड़ क्या है ?

(६) तुम्हारे पास $\frac{३}{२०}$ रु० है और तुम्हारे मित्र के पास $\frac{७}{२०}$ रु० है। तो तुम दोनों के पास मिलाकर एक रुपये की कौन-सी भिन्न है ?

(७) यदि २$\frac{३}{७}$ मन के बोरे में से तुम १$\frac{२}{८}$ मन चावल निकाल लो तो कितना चावल बच रहेगा ?

(८) एक प्रश्न को हल करने मे तुमको ४$\frac{३}{८}$ मिनट लगते हैं और तुम्हारे मित्र को ५$\frac{१}{७}$ मिनट लगते हैं। तो तुम्हारे मित्र को एक मिनट की कौन-सी भिन्न अधिक लगती है ?

(९) यदि एक कमीज़ के लिए २$\frac{३}{४}$ गज़ कपड़े की आवश्यकता होती है तो १५ कमीज़ों में कितना कपड़ा लगेगा ?

(१०) यदि एक पुस्तक के दाम १$\frac{७}{१६}$ रु० हैं तो १० पुस्तकों के दाम निकालो।

(११) यदि १२ घोड़ों के लिए ३८$\frac{२}{८}$ सेर चने चाहिए तो एक घोड़े के लिए कितने सेर चने की ज़रूरत होगी ?

(१२) यदि एक ही नाप की १५ बोतलों मे ११$\frac{१}{४}$ सेर दूध आता है तो एक बोतल में कितना दूध आवेगा ?

(१३) यदि एक भिखारी को $\frac{९}{१६}$ रु० का $\frac{१}{३}$ दिया जाता है तो उसको एक रुपये की कौन-सी भिन्न मिलती है ?

(१४) यदि एक घंटे में तुम ३$\frac{१}{३}$ मील जा सकते हो तो २$\frac{१}{४}$ घंटे में कितनी दूर जा सकोगे ?

(१५) १ गज़ १$\frac{१}{३}$ गज़ की कौन-सी भिन्न है ?

(१६) २$\frac{२}{३}$ सेर को ५$\frac{५}{७}$ सेर की भिन्न में लाओ।

(१७) दो भिन्नों का अन्तर $\frac{३}{२८}$ है। यदि छोटी भिन्न $\frac{५}{७}$ है तो बड़ी भिन्न क्या होगी ? दो भिन्नों का अन्तर $\frac{३}{२८}$ है। यदि बड़ी भिन्न $\frac{५}{७}$ है तो छोटी भिन्न क्या होगी ?

(१८) दो भिन्नों का जोड़ १$\frac{५}{१२}$ है और उनमें से एक भिन्न $\frac{२}{३}$ है तो दूसरी क्या है ?

(१९) दो भिन्नों का गुणनफल $\frac{१}{३}$ है। यदि एक भिन्न $\frac{१०}{१७}$ है तो दूसरी क्या है ?

(२०) $\frac{१}{२}$ और $\frac{१}{४}$ के जोड़ में १$\frac{१}{२}$ और १$\frac{१}{४}$ का जोड़ कितनी बार शामिल है ?

अभ्यास ६

(१) निम्नलिखित भिन्नों को समहरवाली भिन्नों में बदलो :—

$\frac{२}{५}$, $\frac{७}{१५}$, $\frac{११}{२५}$, $\frac{२३}{३५}$ और $\frac{३१}{४५}$।

(२) दो भिन्नात्मक संख्याओं का अन्तर ९$\frac{३}{७}$ है और उनमें से एक ५$\frac{३}{८}$ है, तो दूसरी क्या है ?

(३) ९$\frac{१}{३}$ और ७$\frac{३}{७}$ के जोड़ और अन्तर का गुणनफल निकालो।

(४) $२\frac{२}{३} + ३\frac{३}{४} + ४\frac{४}{५}$ में $२\frac{२}{३} + ३\frac{३}{४} - ४\frac{४}{५}$ कितनी बार शामिल हैं?

(५) मान बताओ :—

५।≡) ६ पा० का $\frac{१}{२}$ + ४।≡) ३ पा० का $\frac{२}{३}$ − ९।≡) ९ पा० का $\frac{३}{७}$ + ९।।।)९ का $\frac{९}{११}$।

(६) ऐसी भिन्न ज्ञात करो जो कि $\frac{५५}{११९}$ से उतनी ही अधिक हो जितनी $\frac{६१}{१०२}$ से कम हो।

(७) सरल करो :—

$$\frac{६\frac{१}{१२} + ३\frac{४}{९} \text{ का } २\frac{११}{१७} - ३\frac{१}{१८}}{१\frac{१}{३} - १\frac{१}{८} \div ४\frac{१}{२०} + ३\frac{१}{१८}}$$

(८) ३ गज़ २ फ़ुट ४ इंच को ५ गज़ १ फ़ुट ८ इंच की भिन्न में लाओ।

(९) एक रक़म मे यदि उसका $\frac{१}{७}$ जोड़ दें तो वह २२।) हो जायगी। तो रकम बताओ।

(१०) एक खम्भे का $\frac{१}{२}$ भाग लाल है। शेष का $\frac{१}{३}$ नीला है और बाक़ी ४ फ़ुट सफ़ेद है। तो खम्भे की लम्बाई क्या है?

(११) मान बताओ :—

५)१।।– का $\frac{३}{५}$ − १९।।।)२।– का $\frac{४}{७}$ + २९।।।)७।।– का $\frac{५}{९}$ − २)१= का $\frac{७}{११}$।

(१२) ११६।.=)८ की कौन-सी भिन्न २३।–)४ पा० है?

(१३) एक रक़म तीन लड़कों में बाँटी गई। पहले को दूसरे का $\frac{२}{५}$ और तीसरे का $\frac{३}{७}$ मिला। तीसरे को यदि ५१।।।–)६ मिले तो बाक़ी दोनों को क्या मिला?

(१४) एक पीपे का $\frac{३}{४}$ भाग पहले शराब से भर दिया गया। बाक़ी में पानी भर दिया गया। तब सबका $\frac{१}{४}$ भाग निकाल लिया गया और फिर पानी भर दिया गया। अन्त में कुल पीपे का कौन-सा भाग पानी है ?

(१५) सरल करो :—

$$\frac{\frac{३}{४}+\frac{४}{५}}{६+\frac{१}{१०}} \text{ का } \frac{\text{॥=)६}}{\text{१॥≡)}} \div \frac{\text{१॥)३}}{\text{४)१}}$$

(१६) एक हौज़ में दो नल लगे हुए हैं। एक पानी भरने के लिए, और दूसरा पानी निकालने के लिए है। पहला एक सेकण्ड में $\frac{७}{८}$ सेर पानी भरता है और दूसरा $\frac{१०}{११}$ सेर निकालता है। यदि दोनों नल उस समय खोल दिये जायँ जब कि हौज़ में ४ मन ३२ सेर पानी भरा हो तो हौज कितनी देर में ख़ाली हो जायगा ?

(१७) सरल करो :—

$$२०\tfrac{३}{४}-[५\tfrac{१}{३}\div\{\tfrac{२}{५}-२\tfrac{४}{५}(\tfrac{१}{२}-\overline{\tfrac{१}{३}-\tfrac{१}{४}})\}]$$

(१८) एक आदमी अपनी यात्रा का $\frac{२}{५}$ भाग नाव से, $\frac{३}{८}$ रेल से और शेष के ९ मील पैदल गया। तो बताओ उसकी यात्रा कितनी लम्बी थी।

(१९) एक आदमी ने एक रक़म चार लड़कों में बाँटी। पहले लड़के को आधी रक़म और एक रुपया मिला। दूसरे को शेष का आधा और एक रुपया मिला। तीसरे को बाक़ी

का आधा और एक रुपया मिला। यदि चौथे लड़के को ३) मिले हों तो चारों लड़कों मे कितना धन बाँटा गया ?

(२०) एक मनुष्य ने जो कि एक जायदाद के $\frac{३}{५}$ का मालिक था, अपने भाग का $\frac{२}{५}$ भाग १४८२$\frac{३}{४}$ रुपये में बेच डाला। तो उसके बचे हुए भाग का मूल्य क्या होगा ?

(२१) ऐसी संख्या ज्ञात करो जिसका $\frac{३}{४}$ उसके $\frac{५}{६}$ से ४$\frac{१}{६}$ कम होगा।

(२२) नीबुओं की वह छोटी से छोटी संख्या बताओ जो कि बिना किसी नीबू को काटे हुए तीन लड़कों में इस प्रकार बाँटी जा सकती है कि पहले को कुल का $\frac{३}{६}$, दूसरे को $\frac{४}{९}$ और तीसरे को शेष मिलें। यह भी बताओ कि प्रत्येक को कितने नीबू मिलेंगे।

(२३) २४५ रुपये चार आदमियों में इस प्रकार बाँटे गये कि पहले को कुल का $\frac{१}{६}$, तीसरे को दूसरे का दूना और चौथे को कुल का $\frac{१}{३५}$ मिला। तो प्रत्येक को कितना धन मिला ?

(२४) कुछ पैसे थे जिनके आधे थैलियों में रख दिये गये। प्रत्येक थैली मे ७५ पैसे थे। बाक़ी पैसे दूसरी थैलियो मे रक्खे गये। इस बार प्रत्येक थैलो में १२५ पैसे थे। यदि कुल धन तीन आदमियो में इस प्रकार बाँट दिया जाय कि एक को कुल का $\frac{२}{५}$, दूसरे को कुल का $\frac{३}{६}$ और तीसरे को शेष धन मिले तो बताओ कि कुल कम से कम कितने पैसे थे।

(२५) कुछ आम तीन लड़को मे बाँटे गये। पहले को कुल का $\frac{१}{३}$ भाग और १५ आम मिले, दूसरे को कुल का $\frac{१}{४}$ भाग और १० आम मिले और तीसरे को कुल का $\frac{१}{५}$ और १४ आम मिले। अब कोई आम शेष नही बचा। बताओ तीनों लड़कों मे कितने आम बाँटे गये और प्रत्येक को कितने आम मिले।

अध्याय २

ऐकिक नियम से सरल समानुपात के प्रश्नों का हल

सरल समानुपात का ज्ञान और ऐकिक नियम-द्वारा उसके प्रश्नों का निकालना निम्नलिखित उदाहरणों को सावधानी से पढ़ने से स्पष्ट हो जायगा।

उदाहरण १—यदि ११ गज़ रेशम की क़ीमत ३३ रुपये है तो उसी रेशम के २२ गज़ की क्या क़ीमत होगी ?

चूँकि किसी चीज़ की क़ीमत उसकी मात्रा पर घटती बढ़ती है, इसलिए यह स्पष्ट है कि जब ११ गज़ रेशम की क़ीमत ३३ रु० है तो इस लम्बाई की दूनी अर्थात् २२ गज़ की क़ीमत भी दूनी यानी ३३ × २ या ६६ रुपये होगी।

यही फल निम्नलिखित रीति से पहले १ गज़ रेशम की क़ीमत निकालकर प्राप्त हो सकता है :—

∵ ११ गज़ रेशम की क़ीमत = ३३ रु०

∴ १ " " " = ३३ रु० ÷ ११ = ३ रु०

∴ २२ " " " = ३ रु० × २२ = ६६ रु०

इस प्रकार तुम यह देखोगे कि २२ गज़ की क़ीमत ११ गज़ की क़ीमत की उतनी ही गुनी होगी जितने गुना कि २२ गज़ ११ गज़ का है, या ११ गज़ रेशम की क़ीमत २२ गज़ की क़ीमत

की वही भिन्न (१/२) होगी जो कि ११ गज़ २२ गज़ की है। यहाँ पर यह कहा जाता है कि यह चार चीजें अर्थात् २२ गज़ की क़ीमत, ११ गज़ की क़ीमत, २२ गज़ और ११ गज़ समानुपात में हैं या समानुपाती हैं।

उदाहरण २—यदि १८ बकरों की क़ीमत ९० रुपये है तो २७ बकरों के क्या दाम होंगे ?

पहले उदाहरण की तरह यहाँ भी २७ बकरों की कीमत १८ बकरों की क़ीमत की उतनी ही गुनी होगी जितनी कि २७ बकरे १८ बकरों की है।

चूँकि, २७ बकरे = १८ बकरों का २७/१८
= १८ बकरों का ३/२
= १८ बकरों का १ १/२,

∴ २७ बकरों की कीमत = १८ बकरों की क़ीमत की १ १/२ गुनी = ९० रुपये की १ १/२ गुनी = ९० रुपये × ३/२ = १३५ रुपये।

यही फल पहले उदाहरण की तरह इस प्रकार भी प्राप्त हो सकता है :—

∵ १८ बकरों की क़ीमत = ९० रुपये
∴ १ बकरे " " = ९० रु० ÷ १८ = ५ रु०
∴ २७ बकरों " " = ५ रु० × २७ = १३५ रु०

इस प्रकार तुम यह देखोगे कि यहाँ भी २७ बकरों की क़ीमत १८ बकरों की क़ीमत की उतनी ही गुनी है जितने गुने

कि २७ बकरे १८ बकरों के हैं, या १८ बकरों की क़ीमत २७ बकरों की क़ीमत की वही भिन्न ($\frac{२}{३}$) है जितनी कि १८ बकरे २७ बकरों की है। इसलिए २७ बकरों की क़ीमत, १८ बकरों की क़ीमत, २७ बकरे और १८ बकरे यह सब समानुपाती हैं।

उदाहरण ३—यदि एक मनुष्य १२ मिनट में १ मील ३५२ गज़ दौड़ सकता है, तो बताओ कि उसी चाल से वह ४ मिनट में कितनी दूर दौड़ जायगा।

चूँकि दौड़ की दूरी समय के अनुसार घटती बढ़ती है, इसलिए यदि चाल एक-सी ही रहे तो यह स्पष्ट है कि जब १२ मिनट में १ मील ३५२ गज़ की दूरी तय होती है तो इस समय के तिहाई भाग अर्थात् ४ मिनट मे इस दूरी की तिहाई अर्थात् १ मील ३५२ गज़ का $\frac{१}{३}$ अर्थात् २११२ गज़ का $\frac{१}{३}$ या ७०४ गज़ तय होगी।

एक मिनट में जो दूरी तय होती है पहले उसको निकाल कर निम्नलिखित रीति से भी यही फल प्राप्त हो सकता है :—

∵ १२ मिनट में जो दूरी तय होती है वह = १ मील ३५२ गज़

= २११२ गज़

∴ १ मिनट " " " = २११२ गज़ ÷ १२

= १७६ गज़

∴ ४ मिनट " " " = १७६ गज़ × ४

= ७०४ गज़

इस दशा में तुम देखोगे कि ४ मिनट में जो दूरी तय होती है वह उस दूरी की जो १२ मिनट में तय होती है वही भिन्न

(यानी $\frac{1}{3}$) है, जो कि ४ मिनट १२ मिनट की है, या १२ मिनट में जो दूरी तय होती है वह उस दूरी की, जो ४ मिनट में तय होती है, उतनी ही गुनी (अर्थात् ३) है जितनी कि १२ मिनट ४ मिनट की है। जैसे पिछले उदाहरणों में था, उसी प्रकार यहाँ भी ये चार चीजें अर्थात् ४ मिनट में तय की हुई दूरी, १२ मिनट में तय की हुई दूरी, ४ मिनट और १२ मिनट समानुपाती कही जाती हैं।

उदाहरण ४—यदि २४ घोड़ों के खाने के लिए ७२ सेर चना एक दिन के लिए चाहिए तो उसी हिसाब से १५ घोड़ों को एक दिन के लिए कितना चना चाहिए ?

चूँकि घोड़ों की संख्या के अनुसार चने की मात्रा घटती बढ़ती है, इसलिए यह स्पष्ट है कि १५ घोड़ों के लिए जितना चना चाहिए वह उतने चने की, जो कि २४ घोड़ों के लिए चाहिए, वही भिन्न होगी जो १५ घोड़े २४ घोड़ों की है।

चूँकि, १५ घोड़े = २४ घोड़ों का $\frac{15}{24}$

= २४ घोड़ों का $\frac{5}{8}$,

∴ १५ घोड़ों के लिए जितना चना चाहिए वह २४ घोड़ों के चने का $\frac{5}{8}$ होगा, अर्थात् ७२ सेर का $\frac{5}{8}$ अर्थात् ४५ सेर होगा।

यही फल पहले १ घोड़े के लिए चने की मात्रा निकाल कर निम्नलिखित रीति से भी प्राप्त हो सकता है:—

∵ २४ घोड़ों के लिए ७२ सेर चना चाहिए,

∴ १ घोड़े ,, ,, ७२ सेर ÷ २४ या ३ सेर चना चाहिए,

∴ १५ घोड़ों ,, ,, ३ सेर × १५ या ४५ ,, ,, ,,।

पिछले उदाहरणों की तरह इस दशा में भी तुम देखते हो कि १५ घोड़ों के लिए जितना चना चाहिए वह २४ घोड़ों के लिए आवश्यक चनों की वही भिन्न (अर्थात् $\frac{५}{८}$) है, जो कि १५ घोड़े २४ घोड़ों की है; या २४ घोड़ों के लिए आवश्यक चने की मात्रा १५ घोड़ों के लिए आवश्यक चने की मात्रा की उतनी गुनी ($\frac{८}{५}$) है, जितना कि २४ घोड़े १५ घोड़ों का है। इसलिए १५ घोड़ों के लिए आवश्यक चना, २४ घोड़ों के लिए आवश्यक चना, १५ घोड़े और २४ घोड़े समानुपाती हैं।

उदाहरण ५—यदि ।।ऽ चावल के बदले में ।।।ऽ गेहूँ मिल सकता है तो ।।ऽ४ चावल के बदले में कितना गेहूँ मिल सकेगा ?

चूँकि, गेहूँ की वह मात्रा, जो कि चावल से बदली जा सकती है चावल की मात्रा के अनुसार घटती बढ़ती है इसलिए यह स्पष्ट है कि गेहूँ की अभीष्ट मात्रा ।।।ऽ की उतनी ही गुनी होगी, जितनी कि २४ सेर २० की है।

चूँकि, २४ सेर $=$ २० सेर का $\frac{२४}{२०}$

$=$ २० सेर का $\frac{६}{५}$

$=$ २० सेर का १$\frac{१}{५}$,

$\therefore$ गेहूँ की वह मात्रा जो कि २४ सेर चावल से बदली जा सकती है उस मात्रा की १$\frac{१}{५}$ गुनी होगी जो कि २० सेर से बदली जा सकती है, अर्थात् ३० सेर की १$\frac{१}{५}$ गुना अर्थात् ३० सेर $\times$ $\frac{६}{५}$ या ३६ सेर होगी।

यही फल निम्नलिखित रीति से पहले गेहूँ की वह मात्रा निकाल कर प्राप्त हो सकता है जो कि एक सेर चावल से बदली जा सकती है :—

∴ गेहूँ की वह मात्रा जो कि २० सेर चावल से बदली जा सकती है
= ३० सेर

∴ " " " १ सेर चावल से बदली जा सकती है
= ३० सेर ÷ २०
= $\frac{३}{२}$ सेर

∴ " " " २४ सेर चावल से बदली जा सकती है
= $\frac{३}{२}$ सेर × २४
= ३६ सेर

यहाँ भी गेहूँ की वह मात्रा जो कि २४ सेर चावल से बदली जा सकती है उस मात्रा की जो कि २० सेर चावल से बदली जा सकती है वही अपवर्त्य (यानी १$\frac{१}{५}$) है जो कि २४ सेर २० सेर का है, और इसलिए यह चार चीज़ें यानी ३६ सेर, ३० सेर, २४ सेर और २० सेर समानुपाती हैं।

समानुपात के सिद्धान्त पर ऊपर के प्रत्येक उदाहरण से तुम यह देखोगे कि समानुपात में :—

(१) चार राशियाँ होती हैं।

(२) कम से कम पहली दो या अन्तिम दो राशियाँ एक जाति की होती है और बाक़ी दो दूसरी जाति की, जैसा कि पहले चार उदाहरणां में हैं, अथवा चारों राशियाँ एक ही जाति की होती हैं जैसा कि उदाहरण ५ में है।

(३) पहली राशि दूसरी राशि की वही भिन्न या अपवर्त्य होती है, जो कि तीसरी राशि चौथी की होती है, अथवा दूसरे शब्दों मे दूसरी राशि पहली राशि की वही अपवर्त्य या भिन्न होती है जो कि चौथी राशि तीसरी की होती है। इसलिए हम साधारणतः कह सकते हैं कि :—

जब चार राशियाँ अथवा संख्यायें आपस में इस प्रकार सम्बन्ध रखती हैं कि पहली राशि या संख्या दूसरी की वही भिन्न या अपवर्त्य हो जो कि तीसरी राशि या संख्या चौथी की होती है तो ये चारों राशियाँ या संख्यायें समानुपाती कही जाती हैं और इन दो भिन्नों या संख्याओं (पूर्ण अथवा भिन्नात्मक) की यह समानता समानुपात कही जाती है।

अब समानुपात के उपर्युक्त उदाहरणों के हल करने की दूसरी रीति से तुम यह देखोगे कि यह रीति इस बात पर निर्भर है कि पहले निम्नलिखित बातें ज्ञात की जायँ:—

(१) रेशम के **एक** गज़ की क़ीमत, जैसा कि उदाहरण १ मे है,

(२) **एक** बकरी की क़ीमत, जैसा कि उदाहरण २ में है,

(३) **एक** मिनट मे कितना रास्ता तय होता है, जैसा कि उदाहरण ३ में है;

(४) **एक** घोड़े के लिए कितना चना चाहिए, जैसा कि उदाहरण ४ में है;

(५) **एक** सेर चावल के बदले कितना गेहूँ मिल सकता है, जैसा कि उदाहरण ५ में है।

इस कारण अनुपात के ऐसे उदाहरणों के हल करने के इस नियम को **एकाई का नियम** अथवा **ऐकिक नियम** कहते हैं।

ऐसे प्रश्नों को हल करने में, जिनमें ३ ज्ञात राशियाँ दी हुई हों और चौथी राशि ज्ञात करनी है इस नियम को व्यवहार में लाने के पहले तुमको प्रत्येक प्रश्न में यह देखना चाहिए कि राशियाँ समानुपाती हैं अथवा नहीं। यदि किसी प्रश्न में राशियाँ समानुपाती नहीं हैं तो ऐसे प्रश्न को हल करना तुम्हारे लिए असम्भव होगा, और यदि तुम ऐकिक नियम लगाकर ऐसे प्रश्न को हल भी करो तो तुमको कोई बे मतलब या असम्भव उत्तर प्राप्त होगा। उदाहरण के लिए निम्नलिखित प्रश्न को लो:—

उदाहरण ६—यदि ८ वर्ष की आयु मे एक लड़के की लम्बाई ४ फ़ीट है तो २४ वर्ष की आयु में उसकी लम्बाई क्या होगी?

मान लो कि यहाँ इस बात पर विचार न करके कि इस प्रश्न में चारों राशियाँ समानुपाती हैं या नही, हम एक-दम ऐकिक नियम का प्रयोग करते हैं, जैसा कि नीचे दिखाया गया है:—

चूँकि ८ वर्ष की आयु में लम्बाई = ४ फ़ीट

∴ १ " " " = ४ फ़ीट ÷ ८ = ½ फ़ुट

∴ २४ " " " = ½ फ़ुट × २४ = १२ फ़ीट

यह एक बिलकुल असम्भव उत्तर है, क्योंकि हमने १२ फ़ीट लम्बा आदमी कभी न देखा और न सुना। इस निरर्थक उत्तर का

कारण बहुत सरल है। यह सब लोग अच्छी तरह जानते हैं कि बच्चे की लम्बाई उसकी अवस्था के अनुसार उसी हिसाब से नहीं बढ़ती। इसलिए २४ वर्ष की आयु की लम्बाई ८ वर्ष की आयु की लम्बाई का वही अपवर्त्य नहीं हो सकती जो कि २४ वर्ष ८ वर्ष का है, और इसलिए ये चारों राशियाँ समानुपाती नहीं हैं। इसलिए ऐसे प्रश्नों को हल करने में हम ऐकिक नियम व्यवहार में नहीं ला सकते।

अभ्यास ७ (ज़बानी)

(१) अगर १५ आमों का दाम ३० पैसा हो तो २५ आमों का दाम बताओ।

(२) अगर ८ क़लमों का दाम ।) हो तो १४ क़लमों का दाम बताओ।

(३) १ सेर मिठाई का दाम क्या होगा अगर ५ छटाँक का दाम ।।।≡) हो ?

(४) १४ चीज़ो की क्या क़ीमत होगी अगर ३ चीज़ों की क़ीमत ।।–) हो ?

(५) १२ आने में कितने आम ख़रीदे जा सकते हैं अगर ५ आमों का दाम =)।। हो ?

(६) अगर ७ छटाँक घी की क़ीमत ।।=)६ हो तो २) में कितना घी ख़रीदा जा सकता है ?

(७) एक लड़का ४ मिनट मे १६० गज़ चलता है तो १० मिनट में कितना चलेगा ?

(८) १० मिनट में मैं १ मील दौड़ सकता हूँ तो १६ मिनट में कितना दौड़ूँगा ?

(९) अगर २४ मिनट में तुम ६ पृष्ठ लिख सकते हो तो ४० मिनट में कितना लिखोगे ?

(१०) अगर ६ दिन में मैं २४) कमाता हूँ तो १५ दिन मे कितना कमाऊँगा ?

(११) अगर ११ धोतियो का दाम २२) हो तो ५ धोतियों का दाम बताओ।

(१२) ५० मील की यात्रा में अगर २५) खर्च हों तो ३२ मील की यात्रा में कितना खर्च होगा ?

(१३) १८ गज़ रस्सी का दाम ॥=) हो तो २३ गज़ रस्सी का दाम बताओ।

(१४) ६ किताबों की तौल २ सेर ४ छटाँक है तो १० किताबों की तौल बताओ।

(१५) एक मकान मे हर ८ दिन में २ सेर नमक खर्च होता है तो ३० दिन के एक महीने मे कितना नमक खर्च होगा ?

(१६) यदि १४ गज़ कपड़ा ७॥=) मे आता हो तो ऐसा ही कपड़ा ९) में कितना आयेगा ?

(१७) मैं उस पुस्तक के कितने पन्ने आधे घण्टे में पढ़ सकूँगा जिसके ४ पन्ने १२ मिनट में पढ़ता हूँ ?

(१८) यदि ३६ मिनट में एक आदमी ३ मील चलता हो तो ५ मील कितनी देरी में जायगा ?

(१९) यदि एक आदमी ३ घण्टे में १० मील चलता हो तो उसी चाल से वह १० घण्टे मे कितनी दूर जायगा ?

(२०) यदि रेल के ५ मील का किराया १६ पाई हो तो ७½ मील का क्या किराया होगा ?

अभ्यास ८

(१) अगर ६ सेर तेल का दाम ३) हो तो १० सेर का दाम बताओ।

(२) ५ छटाँक घी का दाम ।≡)६ पा० है तो १ सेर का दाम बताओ।

(३) ८ धोतियों का दाम १३) है तेा १३ धोतियों का दाम बताओ।

(४) अगर १४ गज़ कपड़े का दाम ३॥) हो तेा १२ गज़ का दाम बताओ।

(५) अगर १५ मन चावल का दाम २॥।–) हो तेा २) का दाम बताओ।

(६) कोई आदमी एक सप्ताह में २८) कमा लेता है तेा ३० दिन के एक महीने में वह कितना कमा लेगा ?

(७) अगर तुम्हारी नौकरानी की ३० दिन के महीने की तनख्वाह ६) है तेा १२ दिन की क्या तनख्वाह हुई ?

(८) किसी घर में १२ दिन के लिए २ मन ९ सेर चावल की जरूरत होती है। तो बताओ ३० दिन के एक महीने में उसी हिसाब से कितना चावल खर्च होगा।

(९) १४ गज़ रेशम की क़ीमत २०=) है तो १६ गज़ को क़ीमत बताओ।

(१०) अगर ५ रु० का ४ सेर घी आता हो तो ११) में कितना घी मिलेगा ?

(११) १५ मील की यात्रा में १॥=) खर्च होता है तो बताओ कि १५) से मैं कितने मील की यात्रा कर सकता हूँ।

(१२) अगर १२ बीघा जमीन का लगान ८४ रु० हो तो ५६ बीघा का लगान बताओ।

(१३) फजली आम २॥) कोड़ी बिकता है, तो ७५ आमों की क़ीमत निकालो।

(१४) अगर १४ गज़ रेशम की क़ीमत १६॥=) है तो १० गज का दाम बताओ।

(१५) ३२ किताबों का दाम ८९) है तो उसी भाँति की ५० किताबों की क्या कीमत होगी ?

(१६) २/ चावल का दाम १८।-) है तो १॥/ चावल का दाम बताओ।

(१७) ३ गज़ १ .फुट कपड़े का क्या दाम होगा अगर २ गज़ २ .फुट कपड़े की क़ीमत ॥-) ४ पा० है ?

(१८) अगर १ सेर ७ छटाँक तेल की क़ीमत मैंने ।।≥)६ दी तो २ सेर के लिए मुझे क्या देना पड़ेगा ?

(१९) १ वर्ष ८ महीने की आय बताओ अगर वार्षिक आय ९००) हो।

(२०) अगर ५ आदमी ६५ बीघा काट सकते हों तो ८ आदमी उतने ही समय में कितने बीघा काट सकेंगे ?

(२१) अगर एक घड़ी ९ घंटे में १८ सेकंड तेज़ हो जाती है तो ६ दिन में कितनी तेज़ हो जायगी ?

(२२) अगर एक आदमी ५३/४ घंटे में २२ मील जाता है तो २ घंटे ४० मिनट में कितना जायगा ?

(२३) ११)८ चीनी की क़ीमत २२४ रु० है, तो ४)१।। की क़ीमत निकालो।

(२४) १५॥।) आने में कितने मील की यात्रा की जा सकती है अगर ६३ मील की यात्रा में १।-) ख़र्च होता है ?

(२५) अगर कोई यात्री ९ दिन में १७१ मील की यात्रा करता है तो ११ दिन में उसी तरह से कितने मील की यात्रा करेगा ?

(२६) अगर १७ मन ६ सेर गेहूँ की क़ीमत १४२॥।=)८ पा० हो तो ३७५।-)४ पाई में कितने मन गेहूँ ख़रीदे जा सकते हैं ?

(२७) २४ गज़ लम्बी दरी की क़ीमत ५४ रु० है तो उसी तरह की ५० गज़ लम्बी दरी की क्या क़ीमत होगी ?

(२८) एक आदमी किसी काम को ३ घंटे में पूरा कर सकता है, तो ४० मिनट में उसी काम का कौन-सा हिस्सा करेगा ?

(२९) किसी यात्री ने अपनी यात्रा का $\frac{१}{१६}$ हिस्सा ४५ दिन में पूरा किया तो इसी हिसाब से बाक़ी यात्रा को कितने दिनों में पूरी करेगा ?

(३०) अगर किसी काम का $\frac{२}{३}$ एक आदमी १२ दिन में कर सकता है तो उसी काम के $\frac{३}{४}$ को कितने समय में करेगा ?

जिस तरह के समानुपात पर हमने अभी तक विचार किया है उसको **सीधा समानुपात** कहते हैं, क्योंकि ऐसे समानुपात के उदाहरणों मे जो दो तरह की राशियाँ अर्थात् क़ीमत और मात्रा, खानेवालों की संख्या और मात्रा, दूरी और समय, इत्यादि, होती हैं उनमें से एक उसी हिसाब से घटती और बढ़ती है जिस हिसाब से कि दूसरी घटती और बढ़ती है, अर्थात् जब कि एक को किसी पूर्ण अथवा भिन्नात्मक संख्या से गुणा करते अथवा भाग देते है तब दूसरी भी उसी पूर्ण अथवा भिन्नात्मक संख्या से गुणित या विभाजित हो जाती है, जैसा कि तुमने ऊपर के उदाहरणों मे देखा है।

इस सीधा समानुपात के अतिरिक्त एक दूसरे प्रकार का भी समानुपात होता है, और इस प्रकार के समानुपात के कुछ उदाहरण लेकर हम यह दिखलावेंगे कि ऐकिक नियम से ऐसे उदाहरण किस प्रकार हल किये जाते हैं।

उदाहरण ७—यदि ५ आदमी एक काम को ३० दिन में कर सकते हैं तो उसी हिसाब से काम करके १५ आदमी उस काम को कितने दिन मे कर लेंगे ?

जब एक आदमी एक काम को ४ दिन में कर सकता है तो उसी हिसाब से काम करने पर २ आदमो उसे ४ दिन के आधे में अर्थात् २ दिन में कर लेंगे। इसी प्रकार, जब ५ आदमी एक काम को ३० दिन में करते हैं तो यह स्पष्ट है कि यदि उसी हिसाब से काम करनेवाले इस संख्या के तिगुने, अर्थात् १५ आदमी उसी काम पर लगा दिये जायँ तो ५ आदमी जितने दिन लगाते हैं उसके केवल एक तिहाई दिन अर्थात् १० दिन में वे उसे समाप्त कर लेंगे; अर्थात् जब कि आदमियों की संख्या को ३ से गुणा करते हैं तो दिनो की संख्या मे ३ का भाग दिया जाता है।

इस उदाहरण मे जो चार राशियाँ आती हैं अर्थात, दिनों की संख्या जिसमे कि १५ आदमी काम समाप्त कर लेते हैं (यानी १० दिन), दिनों की संख्या जिसमें ५ आदमी काम समाप्त कर लेते हैं (यानी ३० दिन), १५ आदमी और ५ आदमी, उन पर थोड़ा ध्यान देने पर तुम देखोगे कि यहाँ पहली राशि दूसरी की वही भिन्न है जो कि चौथी राशि तीसरी की है। समानुपात और समानुपाती राशियों के विषय में पहले जो कुछ कहा गया है उससे तुमको यह स्पष्ट हो जायगा कि इस दशा मे दो भिन्नों में से किसी एक को केवल उलट देने से समानुपात प्राप्त हो जाता है, जैसा कि आगे दिखाया जाता है :—

पहली भिन्न $\frac{\text{१० दिन}}{\text{३० दिन}}$ दूसरी भिन्न $\frac{\text{१५ आदमी}}{\text{५ आदमी}}$ के बराबर न होने के कारण हम इनमें से एक को उलट देते हैं, और इस प्रकार दोनो में बराबरी हो जाती है, और तब हम इनको समानुपात के रूप मे लिखते हैं। इस प्रकार :—

$$\frac{\text{१० दिन}}{\text{३० दिन}} = \frac{\text{५ आदमी}}{\text{१५ आदमी}} \text{ या } \frac{\text{३० दिन}}{\text{१० दिन}} = \frac{\text{१५ आदमी}}{\text{५ आदमी}}$$

इस कारण इस प्रकार के समानुपात को **उलटा समानुपात** कहते हैं और उपर्युक्त उदाहरण में दी हुई चारो राशियाँ **उलटा समानुपाती** कहलाती हैं।

तुम उलटे समानुपात के ऐसे उदाहरण भी ऐकिक नियम-द्वारा निम्नलिखित रीति से निकाल सकते हो। तुमको यह याद रखना चाहिए कि दो प्रकार की राशियो में से यदि एक को किसी सख्या (पूर्ण अथवा भिन्नात्मक) से गुणा किया या भाग दिया जायगा तो दूसरी तरह की राशि को उसी सख्या से भाग दिया या गुणा किया जायगा तो उत्तर निकल आवेगा,

∵ काम समाप्त करने के लिए ५ आदमियों को ३० दिन चाहिए,

∴ " " " " " १ आदमी " ३० दिन × ५।

या १५० दिन चाहिए,

∴ " " " " " १५ आदमियों को १५० दिन ÷ १५,,

या १० दिन ,,

समानुपात के प्रश्नों को हल करने में ऐकिक नियम का किस प्रकार प्रयोग होता है, इसे समझाने के लिए हम एक और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण ८—तीन मील प्रति घण्टे की चाल से एक मनुष्य को अपने मकान से स्टेशन तक पहुँचने में २ घण्टे लगते हैं। यदि वह ४ मील प्रति घण्टे के हिसाब से चले तो उसे उतना ही चलने में कितना समय लगेगा ?

यहाँ पर जो दो राशियाँ अर्थात् चाल और समय हैं उनमें से एक यदि घटती या बढ़ती है तो दूसरी क्रम से उसी हिसाब से बढ़ती या घटती है, अर्थात् जब एक को किसी संख्या (पूर्ण या भिन्नात्मक) से गुणा करते या भाग देते हैं तो दूसरी को उसी संख्या से भाग दिया या गुणा किया जाता है। इस प्रकार. यदि चाल दूनी हो जाती है तो समय आधा हो जाता है, और यदि चाल आधी कर दी जाती है तो समय दूना हो जाता है। इसलिए यह प्रश्न उलटा समानुपात का उदाहरण है और इसको हम ऐकिक नियम से निम्नलिखित रीति पर हल कर सकते हैं।

∵ ३ मील	प्रति घण्टे की चाल से		२ घण्टे लगते	हैं,
∴ १	,,	,,	,, २ घं० × ३ या ६ घं०	,,
∴ ४	,,	,,	,, ६ घं० − ४	,,
			या ६ घं० × $\frac{१}{४}$	,,
			या $\frac{३}{२}$ घं०	,,
			अर्थात् १ घं० ३० मि०	,,

नोट—सीधा समानुपात और उलटा समानुपात के उदाहरणों का मिलान करने पर तुम देखोगे कि पहली दशा में पहली क्रिया भाग की और अन्तिम क्रिया गुणा की होती है। इसके विपरीत उलटा समानुपात में पहली क्रिया गुणा की और अन्तिम क्रिया भाग की होती है। इसलिए अङ्कगणित में ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिए तुम्हें केवल यही नहीं ज्ञात करना चाहिए कि तीन दी हुई राशियाँ और चौथी अज्ञात राशि समानुपाती है या नहीं, वरन् यह भी ज्ञात करना चाहिए कि वे सीधा समानुपाती है या उलटा समानुपाती है।

अभ्यास ९ (ज़बानी)

(१) अगर ५ आदमी एक काम को ४ दिन मे कर सकते हो तो ३ आदमी उस काम को कितने दिनो मे करेंगे ?

(२) अगर ६ लडके एक काम को २ दिन मे करते है तो ८ लडके उस काम का कितने दिनो मे करेंगे ?

(३) किसी काम को ५ लडके १२ दिन मे पूरा करते हैं तो ४८ दिन मे पूरा करने के लिए कितने लडको की आवश्यकता होगी ?

(४) ८ आदमी एक खेत को ६ दिन मे काट लेते है तो ४ दिन मे उसी खेत को काटने के लिए कितने आदमियो की आवश्यकता होगी ?

(५) जो खाना १२ आदमियो को ४ दिन के लिए होता है वह १६ आदमियो को कितने दिन के लिए होगा ?

(६) जितना घी ६ आदमियों को २० दिन के लिए होता है उतना ही घी अगर ४ आदमी और बढ़ जायँ तो कितने दिन चलेगा ?

(७) ६ घोड़े जितना दाना ४ दिन में खाते हैं उतना ही दाना ८ घोड़ों को कितने दिन के लिए होगा ?

(८) ३ मील प्रतिघंटा की चाल से जितनी दूरी मैं ५ घंटे मे तय करता हूँ उतनी ही दूरी ५ मील प्रति घंटा की चाल से कितनी देरी में तय करूँगा ?

(९) एक लड़का २ मील प्रतिघंटा की चाल से १५ मिनट में पाठशाला से घर को जाता है। अगर वह घर को १० ही मिनट में जाय तो वह कितने मील प्रतिघंटा की चाल से चला ?

(१०) अगर एक यात्री ८ घं० प्रतिदिन चल कर अपनी यात्रा ३ दिन मे पूरी कर लेता है तो उसी यात्रा को ६ दिन में पूरी करने के लिए उसे कितने घंटे प्रतिदिन चलना चाहिए ?

(११) अगर ४ आदमी एक काम को ६ दिन में कर सकते हों तो उसी काम को ६ आदमी कितने दिनों में करेंगे ?

(१२) ३ मील प्रतिघंटा चल कर मैं किसी दूरी को आध घंटे में तय कर सकता हूँ। तो बताओ ५ मील प्रतिघंटा चल कर उस दूरी को कितनी देरी में तय कर सकूँगा ?

(१३) यदि १० मन घास १६ घोड़ों के लिए ९ दिन को हो तो यही घास १२ दिन के लिए, कितने घोड़ों को होगी जब

कि यह मान लिया जाय कि प्रतिदिन हर घोड़े को बराबर वजन की घास दी जाती है।

(१४) एक आदमी ३ मील प्रतिघटे की चाल से कुछ दूर ४ घटे मे जाता है। अगर वह एक ऐसे इक्के पर जाता जो १ घटे मे ८ मील चलता हो तो इस दूरी को तय करने मे उसको कितना समय लगता ?

(१५) अगर एक मालगाडी २० मील प्रतिघटे की चाल से कुछ दूरी किसी जगह न ठहर कर ९ घटे मे तय करती है तो बताओ एक डाकगाडी इसी दूरी का ४ घटे मे किसी जगह न ठहर कर किस चाल से चल कर तय करेगी।

अभ्यास १०

(१) अगर १२ आदमी एक काम को १५ दिन मे कर सकते हो तो ४५ आदमी उसी काम को कितने समय मे करेगे ?

(२) अगर १८ आदमियो को एक दीवार के बनाने मे १२ दिन लगत है तो इतनी ही बडी दीवार को ३६ दिन मे कितने आदमी बना लेगे ?

(३) अगर ७२ आदमी १ सडक को १५ दिन मे बना सकते हैं, तो उसे १२ दिन मे कितने आदमी बना लेगे ?

(४) ३९ आदमी जिस काम को १० दिन मे पूरा कर सक्ते हैं, उसी काम को १३ दिन मे पूरा करने के लिए कितने आदमियो की जरूरत होगी ?

(५) अगर १८ आदमी एक कुएँ को २० दिन में खोद लेते हैं तो १२ आदमियों को उसके खोदने में कितने दिन लगेंगे ?

(६) किसी बोर्डिंगहौस में जिस भाँति खाना २५ लड़कों को १४ दिन को होता है अगर पहले ही दिन ५ लड़के और आ जायें तो वह खाना कितने दिन के लिए होगा ?

(७) किसी अहीर के पास २४ गायें हैं जिनके चारे का खर्च प्रतिसप्ताह ३६ रु० है। तो बताओ ४० गायों के खर्च के लिए वे रुपये कितने दिन के लिए होंगे।

(८) १६ आदमियों के लिए जितना गेहूँ २७ दिन को होता है अगर २ आदमी और बढ़ जायें तो उतना ही गेहूँ कितने दिन चलेगा ?

(९) किसी घर में १५ आदमी हैं और उनके २० दिन के खर्च के लिए गेहूँ है। अगर वह गेहूँ केवल १२ दिन चले तो बताओ कि इस घर में कितने आदमी और आगये।

(१०) अगर किसी काम के पूरा करने में ८ आदमियों को ७५ दिन लगते हों तो उस काम को ४० दिन में कितने आदमी पूरा कर लेंगे ?

(११) एक आलू का खेत लगाने में १५ आदमियों को ५ दिन लगते हैं, तो उस आलू के खेत को ३ दिन में कितने आदमी लगावेंगे ?

(१२) रेल की कुछ पटरियो के बिछाने में २४० आदमियों को १२० दिन लगते है। तो बताओ १०० दिन मे उनके बिछाने के लिए कितने आदमियो की आवश्यक्ता होगी।

(१३) एक आदमी घोड़े पर यात्रा करता है और ९ मील प्रति-घटा की चाल से १८ घंटे मे कुल यात्रा पूरी कर लेता है, तो बताओ ५ मील प्रतिघटा की चाल से पैदल जाने मे उसे कितना समय लगेगा।

(१४) ८०० आदमियो के एक रिसाला के लिए २५ दिन का खाना जमा है। अगर २०० आदमी और आ जावे तो वह खाना कितने दिन तक चलेगा ?

(१५) एक यात्री ४ घंटा प्रतिदिन चल कर ६ दिन मे एक तीर्थ पर पहुँच जाता है। अगर वह ८ दिन मे उस तीर्थ पर पहुँचना चाहता तो उसे प्रतिदिन कितने घटे चलने पड़ते ?

अध्याय ३

साधारण ब्याज

मान लो कि किसी आदमी को ६४ रुपये की आवश्यकता आ पड़ी, परन्तु उसके पास कुछ भी रुपये नहीं हैं; तो निश्चय है कि वह किसी के पास रुपयों के लिए जायगा। तुम्हारी समझ में वह किसके पास जायगा ? जहाँ तक सम्भव है वह किसी मालदार या नातेदार, जैसे तुम्हारे पिता के पास जायगा। यदि इन लोगों से काम न निकला तो वह किसी बनिये या महाजन के पास जायगा। मान लो कि उसने किसी बनिये से यह रुपया ऋण के रूप में लिया और अब से एक माह के बाद चुका देने का वचन दिया। एक महीना पूरा होने पर जब वह ६४ रुपया लेकर बनिये के पास ऋण चुकाने गया, तब बनिये ने उससे यह कहा कि तुमने एक महीने तक मेरा रुपया रक्खा और इससे अपना काम चलाया, इसलिए इसके बदले में मुझे १ रुपया और मिलना चाहिए। अगर यह रुपया तुम्हारे पिता से उसको मिल गया होता तो सम्भव है कि वे उससे इसका बदला न माँगते; किन्तु बनिया तो इस रुपये को दूकान के सौदे में लगा कर कुछ न कुछ लाभ अवश्य उठाता, इसलिए अगर वह कुछ बदला न ले तो उसको अवश्य हानि होगी। इसलिए बनिये का १ रुपया

माँगना उचित है। यह १ रुपया, जो कि ६४ रुपये को एक महीना तक काम में लाने के बदले में दिया गया, **ब्याज** कहा जाता है। असली धन अर्थात् ६४ रु० को, जो कि उधार लिया गया था **मूलधन** कहते हैं। कुल धन को, जो कि समय समाप्त होने के बाद चुकाया गया, अर्थात् ६५ रु० को **मिश्रधन** कहते हैं। बनिया और महाजन ऋण देने के पहले ही यह निश्चय कर लेते हैं कि माहवारी प्रतिरुपया पर और क्या लेंगे। इस उदाहरण में तुम देखते हो कि बनिये ने एक पैसा प्रतिरुपया माहवारी लिया है। इसे **ब्याजदर प्रतिरुपया माहवार** कहते हैं। इससे तुम आसानी से समझ जाओगे कि यदि ब्याज दर प्रतिरुपया माहवार तुम्हें ज्ञात हो तो किसी धन का ब्याज तुम आसानी से ज्ञात कर सकते हो, जैसा कि नीचे के उदाहरणों में दिखाया गया है :—

उदाहरण १—४५) का १ महीने का ब्याज ४ पाई प्रति-रुपया माहवार की दर से निकालो।

∵ १ रुपये का ब्याज १ माह के लिए = ४ पाई

∴ ४५ रु० का ब्याज १ माह के लिए = ४ × ४५ पाई

= १८० पाई

= १५ आने

यदि उधार का रुपया एक महीने के बदले तीन महीने बाद दिया जाय तो ऋण लेनेवाले को १ महीने के ब्याज के बदले ३

महीने का ब्याज चुकाना होगा। इस तरह पर उसे १५ आने का ३ गुना अर्थात् २ रु० १३ आ० देना होगा।

उदाहरण २—५०) का ४ माह का ब्याज ५ पाई प्रतिरुपया माहवार की दर से निकालो और वह कुल धन भी बताओ जो ४ माह के बीत जाने पर देना पड़ेगा।

∵ १ रुपया का ब्याज १ माह के लिए = ५ पाई,

∴ ५० रुपये का ब्याज १ माह के लिए = ५ × ५० पाई

= २५० पाई,

∴ ५ रुपया का ब्याज ४ माह के लिए = २५० × ४ पाई

= १००० × पाई

= ८३ आना ४ पाई

= ५≡) ४ पाई

कुल धन = ५० रुपया + ५≡) ४ पा० = ५५≡) ४ पा०

अभ्यास ११ (ज़बानी)

साधारण ब्याज निकालो :—

(१) ६०) का एक महीने के लिए ३ पाई प्रतिरुपया माहवार की दर से।

(२) ४०) का १ महीने के लिए ४ पाई प्रतिरुपया माहवार की दर से।

(३) ४५) का १ महीने के लिए ३ पाई प्रतिरुपया माहवार की दर से।

(४) ८०) का १ महीने के लिए ४ पाई प्रतिरुपया माह्वार की दर से।

(५) ९६) का १ महीने के लिए ६ पाई प्रतिरुपया माह्वार की दर से।

(६) ८५) का २ महीने के लिए १ पैसा प्रतिरुपया माह्वार की दर से।

(७) १००) का ४ माह के लिए २ पैसा प्रतिरुपया माह्वार की दर से।

(८) २४०) का ५ माह के लिए १ पैसा प्रतिरुपया माह्वार की दर से।

(९) १००) रुपये का १ साल के लिए २ पैसे प्रतिरुपया माह्वार की दर से।

(१०) ३००) का १ साल ४ माह के लिए एक पैसा प्रतिरुपया माह्वार की दर से।

साधारण ब्याज और मिश्रधन बताओ :—

(११) १०० रुपये का ४ माह के लिए १ पैसा प्रतिरुपया माह्वार की दर से।

(१२) १००) का ६ माह के लिए ६ पाई प्रतिरुपया माह्वार की दर से।

(१३) १६० रुपये का १ साल के लिए ४ पाई प्रतिरुपया माह्वार की दर से।

(१४) २०० रुपये का २ साल के लिए ३ पाई प्रतिरुपया माहवार की दर से।

(१५) ३२०) का ३ साल के लिए २ पाई प्रतिरुपया माहवार की दर से।

अभ्यास १२

साधारण ब्याज निकालो :—

(१) १८०) का ३ महीने के लिए २ पाई प्रतिरुपया माहवार की दर से।

(२) २५०) का ९ महीने के लिए ३ पाई प्रतिरुपया माहवार की दर से।

(३) २७५) का १ साल के लिए ४ पा० प्रतिरुपया माहवार की दर से।

(४) ३६०) का १½ साल के लिए ६ पा० प्रति रुपया माहवार की दर से।

(५) २४०) का १¾ साल के लिए ५ पाई प्रतिरुपया माहवार की दर से।

(६) ४२०) का १ साल २ महीने के लिए)॥ प्रतिरुपया माहवार की दर से।

(७) ३३।=)४ पा० का ६ माह के लिए ५ पा० प्रतिरुपया मासिक ब्याज की दर से।

(८) १२५॥) का २ साल के लिए ६ पा० प्रतिरुपया मासिक ब्याज की दर से।

(९) ७४५) का ६ माह के लिए ७½ पा० प्रतिरुपया मासिक ब्याज की दर से।

(१०) २४६।।≈)८ पा० का १½ साल के लिए ४½ पा० प्रतिरुपया मासिक ब्याज की दर से।

साधारण ब्याज और मिश्रधन निकालो :—

(११) ६८०) का ७½ माह के लिए ३ पा० प्रतिरुपया माहवार ब्याज की दर से।

(१२) ३३३।-)४ पा० का १¼ साल के लिए १½ पैसा प्रतिरुपया मासिक ब्याज की दर से।

(१३) ११११६।।=)८ पा० का १० माह के लिए)॥ प्रतिरुपया मासिक ब्याज की दर से।

(१४) १६८०।=) का २½ साल के लिए ३ पा० प्रतिरुपया मासिक ब्याज की दर से।

(१५) ७५०) का २¼ साल के लिए ४½ पा० प्रतिरुपया मासिक ब्याज की दर से।

(१६) मैंने १४१।-)४ पा०, ३ पा० प्रतिरुपया मासिक ब्याज की दर से ऋण दिया। बताओ १ साल ४ माह के पश्चात् मुझे क्या मिलेगा।

(१७) १०००) किसी महाजन के पास १ साल २ माह तक जमा रखने से)। प्रतिरुपया माहवार ब्याज की दर से कितने हो जायँगे ?

(१८) किसी आदमी ने ३८४) ७½ पा० प्रतिरुपया मासिक ब्याज की दर से ऋण लिये। अगर वह २ साल १ माह के पश्चात् ऋण चुका देना चाहे तो उसे महाजन को कुल कितना देना पड़ेगा ?

(१९) बैजनाथदास साहूकार ने एक आदमी को २५००)१२½ पा० प्रतिरुपया माहवार ब्याज की दर से ऋण दिया। बताओ २½ साल के पश्चात् उसे कुल क्या मिलेगा।

(२०) किसी किसान ने लगान देने के लिए एक बनिये से २५५।।) ४½ पा० प्रतिरुपया मासिक ब्याज की दर से ऋण लिया। तो बताओ १० महीने के अन्त में ऋण चुकाने के लिए उसे कुल कितना देना पड़ेगा।

जब बनिये और महाजन अधिक परिमाण में धन उधार देते हैं तब वह प्रतिरुपया माहवार ब्याज निश्चत करने के बदले प्रति-सैकड़ा [सौ] सालाना ब्याज नियत करते हैं। इस प्रकार की ब्याजदर को प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर कहते हैं। इस तरह ५ प्रतिसैकड़ा सालाना का यह आशय है कि १०० रुपये का ब्याज साल भर के लिए ५ रु० होगा।

आज-कल बनियो और महाजनों से ऋण लेने के बदले विशेष कर अधिक ऋण लेने के लिए लोग प्रायः बैंकों में जाते हैं। बैंक क़रीब क़रीब हर जगह खुल गये हैं और उनमें ब्याज की दर बहुत कम है। ये बैंक और महाजन केवल दूसरों को ही अपना धन नहीं उधार देते वरन स्वयं भी दूसरों से उधार लेते हैं। क्या

तुम्हें मालूम है कि वे किस तरह और क्यों दूसरों से ऋण लेते हैं ? मान लो कि किसी के पास पिछले साल २००) खर्च से बच गये तो वह शीघ्र ही इन रुपयों को सुरक्षित स्थान में रखना चाहेगा। अपने संदूक में रख दे तो चोरी जाने का डर है। इसलिए वह किसी विश्वासी महाजन या किसी बैंक मे ये रुपये जमा करने के लिए जाता है। जब रुपये जमा हो जाते हैं तो उसे एक नियत प्रतिसैकड़ा सालाना की दर से ब्याज मिलता रहता है। इस रीति से महाजन और बैंक दूसरों से ऋण लिया करते हैं। लेकिन इन धनों पर जो इनके यहाँ रक्खे जाते हैं, ब्याज की दर उन धनों के ब्याज की अपेक्षा जो वे दूसरों को उधार देते हैं, बहुत कम होती है और इस ज्यादती का इन्हे लाभ होता है; और यही कारण है कि वह धन उधार लेते हैं ताकि इस रुपये को दूसरों को देकर अधिक ब्याज प्राप्त करें और लाभ उठावें।

किसी किसी समय महाजनों और बैंको का दिवाला निकल जाता है, जिससे कि वे जमा किया हुआ रुपया अदा नहीं कर सकते। इसलिए वह मनुष्य सम्भव है कि किसी और सुरक्षित स्थान पर रुपया जमा करेगा। वह कौन-सा सुरक्षित स्थान है ? अगर कोई ऐसी जगह हो सकती है तो वह डाकखाने का सेविङ्ग बैंक है जिसका काम-काज सब ही डाकखानों में होता है। यह बहुत ही सुरक्षित स्थान है, क्योंकि गवर्नमेंट इस रुपये की रक्षा करती है और इसके अतिरिक्त आवश्यकता के समय कुल या

थोड़ा रुपया बिना किसी कष्ट क निकाल लिया जा सकता है। डाकखाने का सेविङ्ग बैंक भी दूसरे बैंकों और महाजनों की तरह ब्याज देता है किन्तु यहाँ पर ब्याजदर कुछ कम है।

डाकखाने के सेविङ्ग बैंक मे साधारण रीति से ३ प्रतिसैकड़ा सालाना की दर से ब्याज दिया जाता है।

उदाहरण १—२००) पर साल भर के लिए ३ प्रतिसैकड़ा सालाना की दर से तुम्हारे पिता को क्या ब्याज मिलेगा ?

चूँकि ब्याजदर ३ प्रतिसैकड़ा सालाना है,

इसलिए १०० रु० पर साल भर के लिए ब्याज = ३ रुपया

∴ २००) पर साल भर के लिए ब्जाज = ३ रुपया × २

= ६ रुपया।

उदाहरण २—३००) का ब्याज ३ साल के लिए ४½ प्रतिसैकड़ा सालाना की दर से निकालो और मिश्रधन भी बताओ।

चूँकि ब्याजदर ४½ प्रतिसैकड़ा सालाना है,

∴ १००) का ब्याज १ साल के लिए = ४ रु० ८ आ०

∴ ३००) का ब्याज १ साल के लिए = ४ रु० ८ आ० × ३

= १३ रु० ८ आ०

∴ „ „ ३ साल के लिए = १३ रु० ८ आ० × ३

= ४०||)

∴ मिश्रधन = ३०० रु० + ४०||) = ३४०||)

अभ्यास—१३ (ज़बानी)

साधारण ब्याज बताओ :—

(१) २००) का १ साल के लिए ४ प्रतिसैकड़ा सालाना के हिसाब से।

(२) ३००) का १ साल के लिए ५ प्रतिसै० सालाना के हिसाब से।

(३) ४००) का १ साल के लिए ६ प्रतिसै० सालाना के हिसाब से।

(४) ५००) का १ साल के लिए ७ प्रतिसै० सालाना के हिसाब से।

(५) ५०) का १ साल के लिए ८ प्रतिसै० सालाना के हिसाब से।

(६) ३००) का ३ सा० के लिए ४ प्रतिसै० सालाना के हिसाब से।

(७) ४००) का ४ सा० के लिए ३½ प्रतिसै० सा० के हिसाब से।

(८) ५००) का ६ सा० के लिए ५½ प्रतिसै० सा० के हिसाब से।

(९) ६००) का ४ सा० के लिए ६ प्रतिसै० सा० के हिसाब से।

(१०) २००) का २ सा० के लिए ७½ प्रतिसै० सा० के हिसाब से।

साधारण ब्याज और मिश्रधन निकालो —

(११) ७००) का ८ वर्ष के लिए ५ प्रतिसै० सालाना ब्याजदर से।

(१२) ८००) का ३ वर्ष का ७ प्रतिसै० सा० ब्याजदर से।

(१३) ६००) का ५ वर्ष का ८ प्रतिसै० सा० ब्याजदर से।

(१४) ९००) का २ वर्ष का ९ प्रति सै० सा० ब्याजदर से।

(१५) १०००) का ३ वर्ष का ३ प्रतिसै० सा० ब्याजदर से।

अभ्यास १४

साधारण ब्याज निकालो :—

(१) २५०) का ४ साल के लिए ७ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज-दर से।

(२) ३२५) का २½ साल के लिए ५ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज-दर से।

(३) ७५०) का १½ साल के लिए ४ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से।

(४) ५४०) का २¼ साल के लिए ३½ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से।

(५) ६००) का ३⅓ साल के लिए ६ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज-दर से।

(६) ५२५) का ४¾ साल में ३½ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज-दर से।

(७) १४५०) का ३ माह के लिए ५ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज-दर से।

(८) ८४०) का ३½ साल के लिए ६ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज-दर से।

(९) १४१॥=)८ पाई का ८ माह के लिए ८ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से।

(१०) १२५३।-)४ पा० का $१\frac{१}{२}$ साल के लिए ९ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से।

साधारण ब्याज और मिश्रधन निकालो :—

(११) १५४।।।) का $२\frac{१}{४}$ साल के लिए १२ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से।

(१२) ४३५०) का ३ माह के लिए $३\frac{१}{२}$ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से।

(१३) २७५०) का १० माह के लिए १० प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से।

(१४) ४०००) का १ साल ५ माह के लिए $४\frac{१}{२}$ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से।

(१५) १५६९।=) का ११ माह के लिए $७\frac{१}{२}$ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से।

(१६) $३\frac{१}{२}$ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से १५०००) किसी बैंक में जमा किये गये। बताओ माहवार कितना ब्याज मिलेगा।

(१७) १२००) उधार देने से ३ साल ६ माह के अन्त में कितना धन मिलेगा यदि ब्याजदर $४\frac{१}{२}$ प्रतिसैकड़ा सालाना हो ?

(१८) डाकख़ाने के सेविंग बैंक में ।) प्रतिसैकड़ा माहवार ब्याज मिलता है। तो बताओ १२५०) का $१\frac{३}{४}$ साल के लिए कितना ब्याज मिलेगा।

(१९) मैंने १६००) ४३/४ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से एक आदमी को उधार दिये। तो ३३/४ साल के अन्त मे मुझे कुल कितना मिलेगा ?

(२०) ३७५०) डाकख़ाने के सेविंग बैंक में १ साल ८ माह रखने से कितने हो जायँगे यदि ब्याज की दर ३ प्रतिसैकड़ा हो ?

यदि ब्याज का कोई प्रश्न समय, महीनों और दिनो मे दिया हो तो साल १२ महीने या ३६५ दिन का और एक महीना ३० दिन का माना जाता है।

यदि ब्याज किसी एक तारीख़ से दूसरी तारीख़ तक निकालना होता है तो हम आदि और अन्त के दिनों में से केवल एक दिन लेकर कुल दिनों की संख्या निकाल लेते हैं, और तब उसको साल की भिन्न मे लाकर ऊपर के उदाहरणों मे दी हुई रीति से ब्याज निकाल लेते हैं, जैसा कि नीचे के उदाहरण से मालूम हो जायगा :—

उदाहरण १—३७५) का साधारण ब्याज आषाढ़ सुदी ४ से उसी साल के अगहन सुदी १४ तक का ५ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से क्या होगा ?

आषाढ़ सुदी ४ से अगहन सुदी १४ तक ५ माह ११ दिन होते हैं, क्योंकि आषाढ़ सुदी ४ से अगहन सुदी ३ तक पूरे ५ माह हुए और बाक़ी ११ दिन रहे।

परन्तु चूँकि ब्याज का हिसाब लगाने के लिए आदि और अन्त की दोनों तारीख़ों में से केवल एक दिन लिया जाता है, इसलिए हमें इस उदाहरण में केवल ५ माह १० दिन का अर्थात् ५$\frac{१}{३}$ माह का ब्याज निकालना होगा।

. १०० रु० का ब्याज १ साल के लिए = ५ रु०

१ रु० " " " " " $= \frac{५}{१००}$ रु०

∴ ३७५ रु० " " " " " $= \frac{५ \times ३७५}{१००}$ रु०

∴ " " " ५$\frac{१}{३}$ माह " " $= \frac{५ \times ३७५}{१००} \times \frac{५\frac{१}{३}}{१२}$ रु०

$$= \frac{\cancel{५} \times \overset{२५}{\cancel{३७५}}}{\underset{\underset{\cancel{४}}{\cancel{२०}}}{\cancel{१००}}} \times \frac{\overset{\cancel{४}}{\cancel{१६}}}{\cancel{३}} \times \frac{१}{\underset{३}{\cancel{१२}}} \text{ रु०}$$

$= \frac{२५}{३}$ रु०

= ८।~)४ पा०

ऊपर के जिन उदाहरणों में प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर दी हुई है, उनकी क्रियाओं पर ध्यान देने पर तुम्हें तुरन्त मालूम हो जायगा कि मूलधन को प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से और सालों की संख्या से लगातार गुणा करके गुणनफल को १०० से भाग देकर हम ब्याज निकाल सकते हैं, अर्थात, ब्याज $= \frac{\text{मूलधन} \times \text{प्रतिसै० सा० ब्याजदर} \times \text{सालों की संख्या}}{१००}$

पहली रीति का अच्छी तरह अभ्यास हो जाने पर आगे चल कर इसी गुर से ब्याज निकालना चाहिए। •

नोट :—ब्याज के किसी प्रश्न में यदि समय अँगरेज़ी महीनों मे हो तो हर महीने के अलग अलग दिन लेकर कुल दिनों की संख्या निकाल ली जाती है, जैसा कि नीचे बताया जाता है। जनवरी में ३१ दिन, फ़रवरी में २८ दिन या २९ दिन, यदि सन् की संख्या ४ से पूरी बँट जाय और सदी का साल ४०० से पूरा बँट जाय, मार्च में ३१ दिन, अप्रैल में ३० दिन, मई में ३१ दिन, जून में ३० दिन, जुलाई में ३१ दिन, अगस्त में ३१ दिन, सितम्बर में ३० दिन, अक्टूबर में ३१ दिन, नवम्बर में ३० दिन और दिसम्बर में ३१ दिन होते हैं।

अभ्यास १५

साधारण ब्याज निकालो (निकटतम पाई तक):—

(१) २००) का आषाढ़ सुदी ३ से उसी साल की भादौं सुदी १२ तक का ४ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से।

(२) ४५०) का बैसाख सुदी ७ से उसी साल की सावन सुदी १३ तक का ९ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से।

(३) १०००) का सावन सुदी ५ संवत् १९७३ से अगहन सुदी १५ संवत् १९७५ तक का ६ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज-दर से।

(४) १५०) का ८ माह १० दिन के लिए ३ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से।

(५) १२५०) का १ साल ७ माह २० दिन के लिए १२ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से।

(६) ५००) का सन् १९३३ ई० के ४ जनवरी से २५ मई तक के लिए ४ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से।

(७) ६५०) का सन् १९३० ई० के १० जनवरी से सन् १९३१ ई० के २० जनवरी तक के लिए ९ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज-दर से।

(८) ७०००) का ४ मई से २६ अक्टूबर तक के लिए ३½ प्रति-सैकड़ा सालाना ब्याजदर से।

(९) ११३॥।) का ११ माह २० दिन के लिए ८ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से।

(१०) ७५०) का ७ जून से ३१ अक्टूबर तक के लिए ४½ प्रति-सैकड़ा सालाना ब्याजदर से।

(११) १०००) ५ अप्रैल को ७½ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से ऋण दिये गये। उसी साल के १० नवम्बर को कुल कितने रुपये वापस मिलेंगे?

(१२) १५००) २५ फरवरी सन १९३३ ई० को ३½ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से ऋण दिये गये। बताओ इसी साल के २ अक्टूबर को कितना मिश्रधन हो जायगा।

(१३) ८००) का ब्याज २ जनवरी सन् १९२८ ई० से १६ मार्च सन् १९२९ ई० तक का ९ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से क्या होगा?

(१४) १२७५) १ जुलाई सन् १९३३ ई० को ऋण दिये गये। बताओ २४ दिसम्बर सन् १९३४ ई० को मिश्रधन क्या मिलेगा, यदि ब्याजदर १२ प्रतिसैकड़ा सालाना हो।

(१५) २१२॥) १५ अगस्त सन् १९३० ई० को ६$\frac{3}{4}$ प्रतिसैकड़ा ब्याजदर से ऋण दिये गये। तो बताओ २१ मार्च सन् १९३२ ई० को मिश्रधन कितना मिलेगा।

साधारण ब्याज पर विलोम प्रश्न

अब तक तुमने ब्याज के ऐसे प्रश्न लगाये हैं जिनमें मूल-धन, समय और ब्याजदर दी हुई थी, लेकिन अब ऐसे प्रश्नों के लगाने की रीति हम बताते हैं, जिनमें तुम्हें इन्हीं बातों को ज्ञात करना पड़ेगा। ये ब्याज के उलटे या विलोम प्रश्न अधिक कठिन होते हैं। ऐसे प्रश्न प्रायः तीन प्रकार के होते हैं। हम इनमें से प्रत्येक के एक एक उदाहरण देंगे और फिर अभ्यासार्थ प्रश्न देंगे।

उदाहरण १—कितने प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ३$\frac{1}{2}$ वर्ष में २५०) का मिश्रधन २८५) हो जायगा?

२५० रु० का ब्याज ३$\frac{1}{2}$ वर्ष का = २८५ रु०–२५० रु०

= ३५ रु०

∴ १ " " " " " = $\frac{३५}{२५०}$ रु०

∴ १ " " १ " " = $\frac{३५ \times २}{२५० \times ७}$ रु०

∴ १०० " " १ " " = $\frac{३५ \times २ \times १००}{२५० \times ७}$ रु०

= ४ रु०

∴ उत्तर = ४ प्रतिसैकड़ा सालाना ।

ऊपर की क्रिया से प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर निकालने की निम्नलिखित रीति तुम आसानी से निकाल सकते हो: —

$$\text{प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर} = \frac{\text{ब्याज} \times १००}{\text{मूलधन} \times \text{समय सालों मे}}$$

अभ्यास १६ (ज़बानी)

कितने प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से :—

(१) २००) २ साल मे २२०) हो जायँगे ?

(२) ३००) २ साल मे ३६०) हो जायँगे ?

(३) ४००) ३ साल मे ४७२) हो जायँगे ?

(४) ३००) ४ साल मे ३४८) हो जायँगे ?

(५) १५०) ५ साल मे २२५) हो जायँगे ?

(६) ५००) का ब्याज ३ साल मे १०५) हो जायगा ?

(७) २५०) का ब्याज २ साल मे ५०) हो जायगा ?

(८) ५०) का ब्याज २½ साल मे १५) हो जायगा ?

(९) ६४) का १ साल ४ माह का ब्याज २०) होता है। तो बताओ ब्याजदर प्रतिरुपया मासिक क्या है।

(१०) ४८) का २ साल का ब्याज ३६) होता है तो बताओ ब्याजदर प्रतिरुपया मासिक क्या है।

(११) १९२) के २ साल ३ माह मे ब्याज ८१) होता है। तो बताओ ब्याजदर प्रतिरुपया मासिक क्या है।

(१२) २४०) के २ साल में ब्याज ९०) होता है। तो बताओ ब्याजदर प्रतिरुपया मासिक क्या है।

(१३) कितने प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से ७५०) दो साल में ८२५) हो जायँगे ?

(१४) यदि १० साल में किसी धन का ब्याज उसके बराबर हो जाय, तो प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर क्या होगा ?

(१५) कितने प्रतिरुपया मासिक ब्याजदर से कोई धन १० साल मे अपना ड्योढ़ा हो जायगा ?

अभ्यास १७

कितने प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज से :—

(१) ४२५) का ५ वर्ष में ५७३।॥) मिश्रधन हो जायगा ?

(२) १५०) का ४ वर्ष में १८०) मिश्रधन हो जायगा ?

(३) १५००) का ३$\frac{1}{4}$ वर्ष में १७१९।=) मिश्रधन हो जायगा ?

(४) ८५०) का ७$\frac{1}{2}$ वर्ष में ११३६।॥=) मिश्रधन हो जायगा ?

(५) ५२०) का ३$\frac{3}{4}$ वर्ष में ६०२॥।=) मिश्रधन हो जायगा ?

(६) २३७५) पर ४$\frac{1}{2}$ वर्ष का ब्याज ७४८=) होगा ?

(७) १०००) जमा करने पर कितने प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज से मुझे प्रतिमहीना ७।) ब्याज मिलेगा ?

(८) कितने प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से किसी मूलधन का ब्याज १५ वर्ष में उसका $\frac{3}{5}$ हो जायगा ?

(९) ५००) कितने प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से १६ वर्ष में दूने हो जायँगे ?

(१०) *कितने प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से १६४२५)* पर ब्याज १० मार्च सन १८७८ ई० से २५ सितम्बर सन् १८८० ई० तक में १८८३ रु० ४ आ० हुआ ?

(११) अलीअहमद ने १२ अगस्त को ३५०) ऋण लिये और उसी साल के २४ अक्टूबर को ३६०॥) आ० देकर कुल ऋण अदा कर दिया। बताओ उसने कितने प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याजदर से ब्याज अदा किया ?

(१२) एक आदमी ने ६१५॥=) ५ जनवरी सन् १९३१ को ऋण लिये और उसी साल के ३१ मई को ६२७॥≡) देकर कुल ऋण चुका दिया। बताओ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर क्या हुई।

(१३) १२ साल में किसी धन का ब्याज उसका $\frac{३}{८}$ हो जाता है। तो बताओ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर क्या है।

(१४) कितने प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से १० साल में किसी धन का ब्याज मूलधन का १$\frac{१}{४}$ गुना हो जायगा ?

(१५) कितने प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से कोई धन २० साल में अपना २$\frac{१}{२}$ गुना हो जायगा ?

उदाहरण २—कितने समय में ४$\frac{१}{२}$ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज से ६९००) का मिश्रधन ७८३१॥) हो जायगा ?

६९०० रु० का १ वर्ष का ब्याज $= \frac{९}{२ \times १००} \times ६९००$ रु०

$= \frac{६२१}{२}$ रु०

और ६९०० रु० का इष्ट वर्षों का ब्याज

=७८३१।।) − ६९०० रु० = ९३१।।)

$$\therefore \text{वर्षों की इष्ट संख्या} = \frac{९३१\frac{१}{२} \text{ रु०}}{\frac{६२१}{२} \text{ रु०}}$$

= ३ उत्तर

ऊपर की क्रिया को ध्यान से देखने पर तुम समय निकालने की निम्नलिखित रीति आसानी से निकाल सकते हो :—

$$\text{समय} = \frac{\text{ब्याज}}{\dfrac{\text{ब्याजदर प्रतिसैकड़ा सालाना} \times \text{मूलधन}}{१००}}$$

$$= \frac{\text{ब्याज} \times १००}{\text{ब्याजदर प्रतिसैकड़ा सालाना} \times \text{मूलधन}}$$

अभ्यास—१८ (ज़बानी)

कितने समय में :—

(१) ५ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से २००) का ब्याज ४०) हो जायगा ?

(२) ४ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ३००) का ब्याज ४८) हो जायगा ?

(३) ६ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से १५०) का ब्याज ४५) हो जायगा ?

(४) ३½ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ४००) का ब्याज ७०) हो जायगा ?

(५) $४\frac{१}{२}$ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से २००) का ब्याज ९०) हो जायगा ?

(६) $३\frac{१}{२}$ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ६००) का मिश्रधन ६८४) हो जायगा ?

(७))॥ प्रतिरुपया माहवार ब्याज की दर से ४०) का ब्याज ५) हो जायगा ?

(८))। प्रतिरुपया मासिक ब्याज की दर से १२८) का ब्याज २४) हो जायगा ?

(९) ४ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से किसी धन का ब्याज उसका $\frac{४}{५}$ हो जायगा ?

(१०) ५ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से किसी धन का मिश्रधन उसका $१\frac{३}{५}$ गुना हो जायगा ?

अभ्यास—१९

कितने समय मे :—

(१) ३७४५) का ५ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ३९३२।) मिश्रधन होगा ?

(२) ६१७१॥=) का मिश्रधन $४\frac{१}{३}$ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ७२४१।=) ८ पा० हो जायगा ?

(३) २२५०) का मिश्रधन ४ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से २५२० हो जायगा ?

(४) ५००) का मिश्रधन ६ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ६५०) हो जायगा ?

(५) ९२४) ५ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज से ११५५) हो जायगा ?

(६) ७५०) का ब्याज ४ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज से ६०) हो जायगा ?

(७) १५०) उधार लेने से ७½ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज से १८२॥) देना पड़ेगा ?

(८) कितने वर्ष में किसी मूलधन का मिश्रधन २½ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज के हिसाब से उसका डेढ़ गुना हो जायगा ?

(९) कितने समय में ७५०) १२½ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज के हिसाब से दूना होगा ?

(१०) कितने समय में किसी मूलधन पर ब्याज १० प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज के हिसाब से मिश्रधन का १/१० होगा ?

(११) कितने समय में ३३३।~) ४ पा० का ब्याज ४½ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ६०) हो जायगा ?

(१२) मुझको कितने दिन मे ५½ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ५००) का ब्याज ११०) मिल जायगा ?

(१३) ३½ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से २०००) बैंक में जमा किये गये। बताओ कितने समय के अन्त में हम कुल रुपये निकालें कि हमें कुल २३३२॥) मिल जायँ।

(१४) ।।) प्रतिसैकड़ा मासिक ब्याज की दर से २० मार्च सन १९३० को ४५००) ऋण दिये गये। बताओ किस तारीख़ को १०८) ब्याज के मिलेंगे।

(१५) कितने समय में ६ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ब्याज मिश्रधन का १/६ हो जायगा ?

(१६) ३३३।-) ४ पा० का ब्याज कितने समय में उसी ब्याजदर से १२०) हो जायगा, जिस ब्याजदर से १७५) का ब्याज ५ साल में ५२॥) होता है ?

(१७) ५५०) का ब्याज कितने समय में उसी ब्याजदर से ६६) हो जायगा जिस ब्याजदर से ३५०) का ब्याज २ साल ३ माह में ३१॥) होता है ?

(१८) कितने समय में ३/४ प्रतिसैकड़ा माहवार ब्याज की दर से किसी धन का ब्याज उसका २/८ हो जायगा ?

(१९) कितने समय मे ४८५) का ब्याज १० १/३ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ३३९॥) हो जायगा ?

(२०) ४०४।-) ४ पा० १ मार्च सन् १९३१ ई० को १५ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ऋण दिये गये। बताओ किस तारीख़ को मिश्रधन ७०७॥=) ८ पा० हो जायगा।

उदाहरण ३—कितने रुपयों का मिश्रधन ३ वर्ष में ७ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से २५४१) हो जायगा ?

१००) का ३ वर्ष का ब्याज ७ प्रतिसैकड़ा सालाना के हिसाब से = २१ रु०

∴ १०० रु० का ३ वर्ष का मिश्रधन ७ प्रतिसैकड़ा सालाना के हिसाब से = १२१ रु०

∵ १२१ रु० मिश्रधन का मूलधन = १०० रु०

∴   १ "   "   " $= \frac{१००}{१२१}$ रु०

∴ २५४१ "   "   " $= \frac{२५४१ \times १००}{१२१}$ रु०

= २१००) उत्तर

अभ्यास २० (ज़बानी)

कितने मूलधन का ब्याज :—

(१) ५ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से २ साल में ३५०) हो जायगा ?

(२) ४ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ३ साल में ३६) हो जायगा ?

(३) ३½ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ४ साल में ८४) हो जायगा ?

(४) ६ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से २½ साल में १५०) हो जायगा ?

कितना मूलधन :—

(५) ४ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ५ साल में ३६०) हो जायगा ?

(६) ५ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से १० साल में ६००) हो जायगा ?

(७) ३ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ५ साल में ११५०)
हो जायगा ?

(८) ४ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से २½ साल में
११००) हो जायगा ?

(९) ४ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से १½ साल में
कितने मूलधन का ब्याज ९) मिलेगा ?

(१०) कितने रुपये सेविंग बैंक मे जमा किये जायँ कि ३
प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ४ साल में ६०)
ब्याज मिले ?

अभ्यास २१

(उत्तर निकटतम पाई तक निकालो)

कितना मूलधन :—

(१) ४ वर्ष मे ५ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ३७८)
हो जायगा ?

(२) ४ वर्ष में ५ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज से २४०) हो
जायगा ?

(३) ७½ वर्ष में ३⅞ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज से ७५९०≡)८
हो जायगा ?

(४) ७३ दिन में ५ प्रतिसैकड़ा सालाना की दर से
१३४६॥=)८ हो जायगा ?

(५) १६ महीने में ४ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज के हिसाब से २४) हो जायगा ?

(६) ५ वर्ष में ४३/४ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज के हिसाब से २४७।) हो जायगा ?

(७) ७१/२ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज के हिसाब से कितने मूलधन पर २ वर्ष में ७५) ब्याज मिलेगा ?

(८) मैं कितना धन जमा करूँ कि ७१/२ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज के हिसाब से प्रतिमहीने २०) ब्याज के मिला करें ?

(९) कितने मूलधन पर २ वर्ष में ८ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ९६०) ब्याज के मिलेंगे ?

(१०) ३ मार्च से २७ जुलाई तक मे ५१/२ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज के हिसाब से ७६६५) ब्याज कितने मूलधन पर मिलेगा ?

(११) प्रतिसैकड़ा ।।) मासिक ब्याज की दर से किस धन का मिश्रधन ३१/२ साल में ७४७) हो जायगा ?

(१२) कितने रुपये बैंक में जमा किये जायँ कि २१/२ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ६३३) मिल जायँ ?

(१३) एक आदमी ने कुछ रुपये बैंक में जमा कर दिये जिससे ३ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से माहवार २५।।)

ब्याज आता है। बताओ उसने कितने रुपये जमा किये।

(१४))।। प्रतिरुपया माहवार ब्याज की दर से १० माह में किस धन का ब्याज ६२।।) हो जायगा ?

(१५) ४½ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से कितने रुपये ५ नवम्बर सन् १९३१ ई० को बैंक में जमा किये जायँ कि १७ जनवरी सन् १९३२ ई० को २५२।) हो जायँ ?

अध्याय ४

व्यवहारगणित

तुम यह जानते हो कि जब किसी चीज़ की क़ीमत, तौल, लम्बाई इत्यादि दी हुई होती है तो मिश्रगुणा की रीति से उस चीज़ की दी हुई संख्या की क़ीमत, तौल अथवा लम्बाई इत्यादि, किस प्रकार निकाली जाती है। परन्तु पंसारी, बजाज तथा अन्य व्यापारी इन बातों को इस लम्बी रीति से न निकाल कर ज़बानी बहुत छोटी रीति से निकालते हैं। निम्नलिखित उदाहरणों पर सावधानी से विचार करने पर इस छोटी रीति के सिद्धान्त स्पष्टतया समझ में आ जावेंगे।

उदाहरण १—४ आने प्रतिपुस्तक के हिसाब से १२० पुस्तकों के दाम निकालो।

$\because$ ४ आना = १ रुपये का $\frac{१}{४}$

$\therefore$ ४ आने प्रतिपुस्तक की दर से १२० पुस्तकों के दाम

= $\frac{१}{४}$ रुपया प्रतिपुस्तक के हिसाब से १२० पुस्तकों के दाम

= १ रुपया प्रतिपुस्तक के हिसाब से १२० पुस्तकों के दाम का $\frac{१}{४}$

= १२० रुपये का $\frac{१}{४}$

= ३० रुपये

उदाहरण २—८ आने प्रतिपुस्तक के हिसाब से १२० पुस्तकों के दाम निकालो।

∵ ८ आने = १ रुपये का ½

∴ ८ आ० प्रतिपुस्तक के हिसाब से १२० पुस्तकों के दाम
= ½ रु० प्र० पुस्तक के हि० से १२० पुस्तकों के दाम
= १ रु० प्र० पुस्तक के हि० से १२० पुस्तकों के दाम का ½
= १२० रुपये का ½
= ६० रुपये।

ऊपर लिखे हुए उदाहरणो में जो रीति समझाई और दिखलाई गई है, उसका मिश्र गुणा की रीति से मिलान करने पर यह स्पष्ट हो जायगा कि यह रीति केवल छोटी ही नहीं है, वरन् इससे उत्तर ज़बानी निकल सकता है। अब तुमको चाहिए कि इस छोटी रीति से इस प्रकार के कुछ उदाहरण ज़बानी निकालो।

अभ्यास २२ (ज़बानी)

ऊपर लिखे हुए उदाहरणों में जो छोटी रीति समझाई गई है उस रीति से निम्नलिखित चीज़ों की क़ीमत निकालो :—

(१) ८ आ० प्र० टोपी के हिसाब से ४५ टोपियों के दाम।

(२) ४ आ० „ पुस्तक „ „ ८० पुस्तकों „ „ ।

(३) २ आ० प्र० क़लम के हि० से १२५ क़लमों के दाम ।
(४) ८ आ० ,, चित्र ,, ,, २१० चित्रों ,, ,, ।
(५) ४ आ० ,, लकड़ी ,, ,, १९६ लकड़ियों,, ,, ।
(६) २ आ० प्र० नारियल ,, २०० नारियलों,, ,, ।
(७) ८ आ० ,, पुस्तक ,, ,, ३२५ पुस्तकों ,, ,, ।
(८) ४ आ० ,, गुलाब के पौधे ,, ४२० पौधों ,, ,, ।
(९) २ आ० ,, कापी ,, ,, ४१६ कापियों ,, ,, ।
(१०) ८ आ० ,, बक्स ,, ,, २१६ बक्सों ,, ,, ।

अब निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करो।

उदाहरण ३—१० आने प्रतिपुस्तक के हिसाब से १२५ पुस्तकों के दाम निकालो।

१० आने = ८ आने + २ आने

१० आ० प्र० पुस्तक के हि० से १२५ पुस्तकों के दाम
= ८ आ० प्र० पुस्तक के हि० से १२५ पुस्तकों के दाम
+ २ आ० ,, ,, ,, ,, ,,

परन्तु चूँकि ८ आने = १ रुपये का $\frac{1}{2}$

∴ ८ आ० प्रतिपुस्तक के हि० से १२५ पुस्तकों के दाम
= $\frac{1}{2}$ रु० प्रतिपुस्तक के हि० से १२५ पुस्तकों के दाम
= १ रु० प्र० ,, ,, ,, ,, ,, का $\frac{1}{2}$
= १२५ रु० का $\frac{1}{2}$
= ६२ रुपये ८ आने..................(१)

और, चूँकि २ आना = ८ आने का $\frac{1}{4}$

∴ २ आ० प्र० पुस्तक के हि० से १२५ पुस्तकों के दाम

= ८ आ० प्र० पुस्तक के हिसाब से १२५ पुस्तकों के दाम का $\frac{१}{४}$

= ६२ रुपये ८ आने का $\frac{१}{४}$

= १५ रु० १० आने…………(२)

इसलिए (१) और (२) को जोड़कर

१० आ० प्रतिपुस्तक के हि० से १२५ पुस्तकों के दाम

= ८ आ० प्रतिपुस्तक के हि० से १२५ पुस्तकों के दाम + २ आ० ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,,

= ६२ रुपये ८ आने + १५ रुपये १० आने

= ७८ रुपये २ आने।

कुल क्रिया सक्षेप में निम्नलिखित रीति पर दिखलाई जा सकती है:—

		रु०	आ०	पा०
१) के हिसाब से १२५ पुस्तकों का दाम	=	१२५	०	०
∴ ८ आ० के हि० से दाम = १) के हि० से दाम का $\frac{१}{२}$	=	६२	८	०
२ आ० ,, ,, ,, ,, = ८ आ० ,, ,, ,, ,, $\frac{१}{४}$	=	१५	१०	०
१० आ० प्र० पुस्तक के हि० से १२५ पुस्तकों का दाम	=	७८	२	०

उदाहरण ४—७ आने प्रतिटोपी के हिसाब से १३० टोपियों की क़ीमत बताओ।

∵ ७ आने = ८ आने – १ आना।

∴ ७ आ० प्रतिटोपी के हि० से १३० टोपियों के दाम।

=८ आ० प्रतिटोपी के हि० से १३० टोपियों के दाम।

– १ आने „ „ „ „ के दाम।

अब हम ८ आने प्रतिटोपी के हिसाब से १३० टोपियों की क़ीमत और १ आना प्रतिटोपी के हिसाब से भी १३० टोपियों की क़ीमत उसी प्रकार निकालेंगे जैसे कि पिछले उदाहरण में निकाली है और फिर अभीष्ट क़ीमत को दोनों क़ीमतों का अन्तर निकालकर इस प्रकार ज्ञात कर लेंगे :—

१ रु० प्र० टोपी के हि० से १३० टोपियों की क़ीमत = १३० रु० ० आ० ० पा०

८ आ० प्र० टोपी के हि० से १३० टोपियों की क़ीमत = १ रु० के हि० से क़ीमत का $\frac{१}{२}$ = ६५ रु०,

और १ आ० प्रति टो० के हि० से १३० टोपियों की क़ी० = ८ आने के हि० से क़ीमत का $\frac{१}{८}$ = ८ रु० २ आ०

∴ ७ आने प्र० टोपी के हिसाब से १३० टोपियों की क़ीमत (घटाकर) = ५६ रु० १४ आ०।

उदाहरण ५—३ रुपये १२ आने प्रतिकुर्सी के हिसाब से १४४ कुर्सियों के दाम निकालो।

∵ १२ आने = ८ आने + ४ आने

∴ ३ रु० १२ आने प्रतिकुर्सी के हि० से १४४ कुर्सियों के दाम
= ३ रु० प्रतिकुर्सी के हिसाब से १४४ कुर्सियों के दाम +
८ आ० „ „ „ „ „ +
४ आने „ „ „ „ „

अब हम उदाहरण ३ की रीति पर इस प्रकार चलेंगे :—

	रु०	आ०	पा०
१) के हि० से १४४ कुर्सियों के दाम =	१४४	०	०
३) के हि० से दाम = १) के हि० से दाम का =	४३२	०	०
८ आ० ,, ,, = १) ,, ,, ,, १/२ =	७२	०	०
४ आ० ,, ,, = ८ आ० ,, ,, ,, १/२ =	३६	०	०
३ रु० १२ आ० के हि० से १४४ कु० के दाम =	५४०	०	०

नोट—यदि पहले तुम ४ रुपये प्रतिकुर्सी के हिसाब से १४४ कुर्सियों के दाम निकालो और फिर उसमें से ४ आने प्रतिकुर्सी के हिसाब से १४४ कुर्सियों के दाम घटा दो तो भी वही उत्तर आवेगा, जैसा कि ऊपर के उदाहरण ४ में दिखाया गया है ।

अभ्यास २३

जो छोटी रीति ऊपर समझाई गई है, उसी से क़ीमत निकालो :—

(१) ३ आ० प्रतिक़लम के हिसाब से ५० क़लमों की।
(२) ५ आ० ,, ,, ,, ७२ ,, ,,
(३) ६ आ० ,, पुस्तक ,, ९६ पुस्तकों ,,
(४) ७ आ० ,, ,, ,, १२० ,, ,,
(५) १ रु० ९ आ० ,, ,, १४० ,, ,,
(६) १ रु० ११ आ० प्रतिधोती ,, १७२ धोतियों ,,

(७) १ रु० १३ आ० प्र० छाते के हि० से २०० छातों की
(८) २ रु० १४ आ० " दरी " " २२५ दरियों "
(९) २ रु० १५ आ० " चारपाई " " २५० चारपाइयों"
(१०) ३ रु० १२ आ० " घड़ी " " २८० घड़ियों "
(११) २॥=) प्र० लालटेन " " ३०० लालटेनों "
(१२) ४॥) " गज फलालेन " " ३०० गज फलालेन "
(१३) ५ रु० " मन गेहूँ " " ३१२ मन गेहूँ "
(१४) ६ रु० २ आने प्रति जोड़े जूतों " " ३२० जोड़े जूतों "
(१५) ३ पाई प्र० दियास० के बक्स " ३२० दियास० के बक्सों "
(१६) ६ पा० " पेंसिल " ३२० पेंसिलों "
(१७) ९ पा० " " " २८० " "
(१८) ४ पा० प्र० दियास० के बक्स" २४० दिया० के बक्सों "
(१९) ८ पा० " पेंसिल " ३६० पेंसिलों "
(२०) १० पाई " " " ३६० " "

ऊपर के उदाहरणों के हल से तुम यह देखोगे कि सरलता से पूरी क़ीमत निकालने के लिए प्रत्येक दशा में दिये हुए भाव के आनों (या पाइयों) की संख्या जिन भागों में तोड़ी गई है, वे ऐसे हैं कि एक रुपये (या १ आ०) में वे पूरी पूरी बार शामिल हैं; और इसलिए वे एक रुपये (या १ आ०) की ऐसी भिन्न के रूप में दिखलाये जा सकते हैं, जिसका अंश १ हो जैसे २ आने =१ रुपये का १/८, ४ आने=१ रुपये का १/४, ८ आने=१ रुपये का १/२, ६ पा०=१ आ० का १/२ । ऐसे भागों को

समानांश-भाग कहते हैं और उनकी निम्नलिखित परिभाषा हो सकती है :—

किसी राशि का समानांश वह भाग है जो कि उस राशि में पूरी पूरी बार शामिल हो और उस राशि की ऐसी भिन्न के रूप में दिखलाया जा सके जिसका अंश इकाई हो। जैसे १ सेर १ मन का समानांश है, क्योंकि १ सेर = १ मन का $\frac{१}{४०}$

समानांश के और उदाहरण नीचे दिये जाते हैं :—

३ पाई = १ आने का $\frac{१}{४}$	४ इंच = १ गज़ का $\frac{१}{९}$
४ पाई = १ आने का $\frac{१}{३}$	३ इंच = १ गज़ का $\frac{१}{१२}$
६ पाई = १ आने का $\frac{१}{२}$	२ इंच = १ गज़ का $\frac{१}{१८}$
१ आना = १ रुपये का $\frac{१}{१६}$	२० सेर = १ मन का $\frac{१}{२}$
	१० सेर = १ मन का $\frac{१}{४}$
१ फ़ुट = १ गज़ का $\frac{१}{३}$	५ सेर = १ मन का $\frac{१}{८}$
९ इंच = १ गज़ का $\frac{१}{४}$	४ सेर = १ मन का $\frac{१}{१०}$
६ इंच = १ गज़ का $\frac{१}{६}$	२ सेर = १ मन का $\frac{१}{२०}$

तुम यह पहले ही से जानते हो कि एक मिश्र राशि दूसरी राशि की भिन्न में किस प्रकार लाई जाती है। इसलिए तुमको किसी राशि को दूसरी राशि के समानांश के रूप में दिखलाने में कोई कठिनाई न होनी चाहिए।

अभ्यास २४ (ज़बानी)

अग्रलिखित राशियाँ १ रुपये के कौन से समानांश हैं :—

(१) १ आ० ४ पा० (२) ५ आ० ४ पा० (३) २ आ० ८ पा० ?

निम्नलिखित राशियाँ १ मन के कौन से समानांश हैं :—

(४) ५ सेर (५) १ सेर ४ छटाँक (६) २ सेर ८ छटाँक ?

निम्नलिखित समानांशो के मान बताओ :—

(७) १ रुपये का $\frac{१}{२}$ । (८) १ रुपये का $\frac{१}{३}$ ।

(९) १ रुपये का $\frac{१}{६}$ । (१०) १ रुपये का $\frac{१}{८}$ ।

(११) १ रुपये का $\frac{१}{१२}$ । (१२) १ .फुट का $\frac{१}{३}$ ।

(१३) १ .फुट का $\frac{१}{४}$ । (१४) १ मील का $\frac{१}{१२}$ ।

(१५) १ मील का $\frac{१}{८}$ । (१६) १ मन का $\frac{१}{८}$ ।

निम्नलिखित तौलों को ५ सेर के समानांश के रूप में लाओ :—

(१७) १ सेर ४ छटाँक । (१८) ५ छटाँक ।

निम्नलिखित लम्बाइयों को १ फ़रलाँग के समानांश के रूप में लाओ :—

(१९) १० गज़ । (२०) ४४ गज ।

अब हम कुछ अधिक कठिन उदाहरण लेंगे और यह देखेंगे कि मिश्र राशियों के समानांशो की सहायता से मिश्र गुणा के उदाहरणों के हल करने की रीति को किस प्रकार छोटी कर सकते है ।

उदाहरण ६—५ रु० १४ आ० ९ पा० प्रतिकुर्सी की दर से ४५ कुर्सियों के दाम निकालो ।

∵ ५ रु० १४ आ० ९ पा०

=५ रु०+८ आ० +४ आ०+ २ आ० + ६ पा० + ३ पा०

∴ ५ रु० १४ आ० ९ पा० की दर से ४५ कुर्सियों के दाम

=५ रु०, ८ आ०, ४ आ०, २ आ०, ६ पा० और ९ पा० प्रतिकुर्सी की दर से ४५ कुर्सियों के अलग अलग दामों का जोड़।

इस प्रकार, १ उपर्युक्त उदाहरणों की रीति पर चलकर हम हल को निम्नलिखित रीति से लिख सकते हैं :—

		रु०	आ०	पा०
१) की दर से ४५ कुर्सियों के दाम		=४५	०	०
५) हि० से दाम = १) हि० से दाम का ५ गुना		=२२५	०	०
८ आ० " " =" " " " "	$\frac{१}{२}$	= २२	८	०
४ " " " =८ " " " "	$\frac{१}{२}$	= ११	४	०
२ " " " =४ " " " "	$\frac{१}{२}$	= ५	१०	०
६ पा० " " =२ " " " "	$\frac{१}{४}$	= १	६	६
३ " " " =६ पा० " " "	$\frac{१}{२}$	= ०	११	३
५॥=)९ की दर से ४५ कुर्सियों के दाम		=२६६	७	९

ऊपर की क्रिया को संक्षेप रूप से अग्रलिखित रीति से लिखने में अधिक सुगमता होती है :—

		रु०	आ०	पा०		
		४५	०	०	=	दाम १ रुपये की दर से
			५			
		२२५	०	०	=	” ५ रु० ” ”
८ आ० = १ रु० का	$\frac{1}{2}$	२२	८	०	=	” ८ आ० ” ”
४ आ० = ८ आ० का	$\frac{1}{2}$	११	४	०	=	” ४ आ० ” ”
२ आ० = ४ आ० का	$\frac{1}{2}$	५	१०	०	=	” २ आ० ” ”
६ पा० = २ आ० का	$\frac{1}{4}$	१	६	६	=	” ६ पा० ” ”
३ पा० = ६ पा० का	$\frac{1}{2}$	०	११	३	=	” ३ पा० ” ”
		२६६	७	३	=	” ५ रु० १४ आ० ३ पा० की दर से

इन उदाहरणो मे और इनसे पहले के उदाहरणो में मिश्र राशि, जैसे आने, पाई आदि का प्रत्येक भाग ऐसा लिया गया है कि वह अपने से ठीक पहले आनेवाले भाग का समानांश हो। परन्तु निम्नलिखित उदाहरणो से तुमको यह स्पष्ट हो जायगा कि किसी मिश्र राशि को सदा ऐसे भागो मे तोड़ना आवश्यक नहीं है कि प्रत्येक भाग अपने से पहले आनेवाले भाग का समानांश हो।

उदाहरण ७—५ रु० १३ आ० ४ पा० प्रतिमन की दर से ५६ मन चावल के दाम निकालो।

यहाँ १३ आ० ४ पा० = ८ आ० + ४ आ० + १ आ० + ४ पा०, और इन राशियो मे से प्रत्येक अपने से पहले आनेवाली राशि का समानांश है। परन्तु यदि हम १३ आ० ४ पा० के केवल दो भाग ८ आ० और ५ आ० ४ पा० करें तो

अधिक सुविधा होगी। इस दशा में यद्यपि ५ आ० ४ पा० ८ आ० का समानांश नहीं है तथापि वह १ रुपये का समानांश है। इसलिए पिछले उदाहरण की रीति पर चल कर हम अपनी क्रिया को निम्नलिखित रीति पर कर सकते हैं :—

	रु०	आ०	पा०	
	५६	०	०	= दाम ५६ म० के १ रु० दर से।
		५		
	२८०	०	०	= " " " ५ रु० " "
८ आ० = १ रु० का $\frac{1}{2}$	२८	०	०	= " " " ८ आ० " "
५ आ० ४ पा० = १ रु० का $\frac{2}{3}$	१८	१०	८	= " " " ५ आ० ४ पा० "
	३२६	१०	८	= " " " ५ रु० १३ आ० ४ पा० की दर से

उदाहरण ८—चावल के १२५ बोरों की तौल क्या होगी, यदि एक बोरे की तौल २ मन २७ सेर हो?

यहाँ २ मन २७ सेर = २ मन + २० सेर + ५ सेर + २ सेर।

१२५ बोरों की तौल २ मन २७ सेर प्रतिबोरे के हिसाब से = २ मन, २० सेर, ५ सेर और २ सेर प्रतिबोरे के हिसाब से १२५ बोरों की अलग अलग तौलो का जोड़।

दो पिछले उदाहरणों की रीति पर चलकर हम इन समानांशों की सहायता से बोरो की अलग अलग तौल निकाल लेंगे और अपनी क्रिया को अग्रलिखित रूप से करेंगे :—

		म०	से०	छ०	
		१२५	०	०	=१२५ बोरों की तौल १ मन के हि० से
				२	
		२५०	०	०	= ” ” ” २ ” ” ” ”
२० से०= १ म० का	$\frac{1}{2}$	६२	२०	०	= ” ” ” २० से० ” ” ”
५ से०=२० से० का	$\frac{1}{4}$	१५	२५	०	= ” ” ” ५ से० ” ” ”
२ से०=२० से० का	$\frac{2}{5}$	६	१०	०	= ” ” ” २ से० ” ” ”
		३३४	१५	०	= ” ” ” २ मन २७ से० ”

नोट—यहाँ पर तुम यह देखोगे कि २ सेर, ५ सेर के समानांश के रूप में नहीं है, यद्यपि यह उसके ठीक पहले है, वरन् वह २० सेर का समानांश है।

पिछले उदाहरणों में तुम यह देख चुके हो कि मिश्र गुणा की क्रिया एक ऐसी छोटी सी रीति से बड़ी सुगमता से और अधिकतर जबानी की जा सकती है, जिसमें कि गुण्य के आने, पाई, सेर इत्यादि की सख्याओं के सरल और सुविधानुसार समानांश कर दिये जाते हैं। मिश्रगुणा के ऐसे प्रश्नों को जिनके गुणक कोई पूर्ण संख्या हो हल करने की यह रीति अर्थात् गुण्य के आने, पाई, सेर, छटाँक आदि की संख्याओं के समानांश करके प्रश्नों को हल करने की रीति "**साधारण व्यवहारगणित की रीति**" कहलाती है।

चूँकि, इस रीति से मिश्र गुणन के प्रश्न संक्षेप में और जबानी हल हो जाने के कारण साधारणतया पंसारी, बजाज इत्यादि लोग अपने प्रतिदिन के व्यवहार अर्थात् हिसाब

किताब में इस रीति को काम मे लाते हैं, इसलिए इस रीति को "साधारण व्यवहारगणित की रीति" कहते हैं।

अभ्यास २५ (ज़बानी)

दाम निकालो —

(१) ८० क़लमो के ४ आने प्रतिकलम की दर से।
(२) ९० " " ५ आ० ४ पा० " " " "।
(३) १२० कापियो के २ आ० ८ पा० " कापी "।
(४) ५ सेर नमक के ३ रु० ८ आ० प्रतिमन की दर से।
(५) ८ सेर चावल के ५ रु० १० आ० प्रतिमन की दर से।
(६) २ सेर ८ छटॉक घी का ३२ रु० प्रतिमन की दर से।
(७) १४४ पेन्सिलो का १ आ० ४ पा० प्रतिपेन्सिल की दर से।
(८) ४८ पुस्तको का ९ आ० ४ पा० प्रतिपुस्तक की दर से।
(९) ३६ गज़ कपड़े का १० आ० ८ पा० प्रतिगज़ की दर से।
(१०) ९ इञ्च रेशम का २ आ० ४ पा० प्रतिगज़ की दर से।
(११) ६० गज़ कपडे का ६ आ० ८ पा० प्रतिगज़ की दर से।
(१२) १२० पुस्तको का १३ आ० ४ पा० प्रतिपुस्तक की दर से।

(१३) १३२ पुस्तकों का १४ आ० ८ पा० प्रतिपुस्तक की दर से।

(१४) ८ सेर तेल का १३ रुपये प्रतिमन की दर से।

(१५) २ सेर ८ छटाँक शक्कर का ११ रुपये ८ आने प्रतिमन की दर से।

अभ्यास २६

(१) यदि एक मनुष्य २ रुपये १३ आने पाता है, तो इसी हिसाब से १२० मनुष्यों को क्या मिलेगा ?

(२) यदि एक मनुष्य प्रतिदिन २ रुपये १३ आने ९ पाई कमाता है तो वह ६५ दिन में कितना कमा लेगा ?

(३) यदि एक मनुष्य प्रतिदिन ३ रु० १२ आ० ६ पा० कमाता है तो वह ८० दिन में कितना कमा लेगा ?

(४) यदि एक मनुष्य प्रतिदिन ४ रु० ५ आ० ४ पा० कमाता है तो वह १२५ दिन में कितना कमा लेगा ?

(५) यदि एक मनुष्य प्रतिदिन २ रु० ७ आ० ६ पा० कमाता है तो वह ३६५ दिन के साल में कितना कमा लेगा ?

मोल निकालो :—

(६) १२० मन तेल का १२ रु० ८ आ० प्रतिमन की दर से।

(७) २१४ मन चावल का ६ रु० १३ आ० ६ पा० प्रतिमन की दर से।

(८) ३१० मन शक्कर का ११ रु० ९ आ० ३ पा० प्रतिमन की दर से।

(९) १५ मन घी का ३२ रु० ६ आ० ८ पा० प्रतिमन की दर से।

(१०) २१६ मन गेहूँ का ४ रुपये २ आने ८ पाई प्रतिमन की दर से।

केवल २ समानांशों के प्रयोग से मोल निकालो :—

(११) १२४ चीज़ों का ६ रु० १३ आ० ४ पा० प्रतिचीज़ की दर से।

(१२) १८० चीज़ों का ३ रु० ६ आ० ८ पा० प्रतिचीज़ की दर से।

(१३) २१२ चीज़ों का ५ रु० ९ आ० ४ पा० प्रतिचीज़ की दर से।

(१४) २४३ चीज़ों का ७ रु० १० आ० ८ पा० प्रतिचीज़ की दर से।

(१५) २६५ चीज़ों का १२ रु० ७ आ० ४ पा० प्रतिचीज़ की दर से।

केवल एक ही समानांश के जोड़ या अन्तर से उत्तर निकालो :—

(१६) ३६ बोरे गेहूँ की तौल निकालो जब कि प्रतिबोरे की तौल १ मन ३० सेर है।

(१७) ८० टोपियों का मूल्य निकालो जब कि प्रतिटोपी का मूल्य २ रु० १३ आ० ४ पा० है।

(१८) १२६ चीज़ों का मूल्य ६ रु० २ आ० ८ पा० प्रतिचीज़ की दर से निकालो।

(१९) १८५ चीज़ों की तौल निकालो जब कि एक चीज़ की तौल १ म० ३७ से० ८ छ० है।

(२०) २१० चीज़ों की तौल निकालो जब कि एक चीज़ की तौल १ म० १३ से० ५$\frac{3}{4}$ छ० है।

(२१) यदि किसी मनुष्य को ५ मन १७ सेर ८ छटाँक चावल की प्रतिवर्ष आवश्यकता होती है तो उतने ही समय के लिए १६० मनुष्यों को कितने चावल की आवश्यकता होगी ?

(२२) यदि एक मन चावल १ मन ८ सेर १२ छटाँक गेहूँ से बदला जा सकता है तो उसी तरह का १२५ मन चावल कितने गेहूँ से बदला जा सकता है ?

(२३) यदि एक टीन में १८ से० ५$\frac{3}{4}$ छ० घी आता है तो उसी नाप के २१६ टीनों में कितना आ सकेगा ?

(२४) यदि किसी गाड़ी के बड़े पहिये की परिधि ३ गज़ २ फ़ुट ९ इञ्च हो और वह एक स्थान से दूसरे तक जाने में ३२५ चक्कर लगाती हो तो दोनों स्थानों के बीच की दूरी बताओ।

(२५) यदि ईंधन का भाव २ मन ९ सेर ८ छटाँक प्रतिरुपये हो तो ७५ रुपये मे कितना ईंधन आवेगा ?

अब तक तुमने व्यवहारगणित की रीति से केवल साधारण वस्तुओ या राशियो की पूर्ण संख्याओ के दाम और तौल आदि निकालना सीखा है।

निम्नलिखित उदाहरणो से तुम्हे ज्ञात होगा कि मिश्र राशिया के दाम और तौल इत्यादि भी इस रीति से किस प्रकार निकाले जा सकते हैं। इन दशाओ मे हम उन मिश्र राशियो को, जिनके दाम, तौल आदि तुम्हे ज्ञात करना है, उचित समानाशो मे बाँट लेते हैं और फिर प्रत्येक समानाश का मान, तौल इत्यादि अलग अलग ज्ञात करके दी हुई कुल मिश्र-राशि का मान, तौल आदि निकालने के लिए उन सबका आपस मे जोड देते हैं, जैसा कि आगे हल किये हुए उदाहरण से प्रकट होगा –

उदाहरण ९—८॥ऽ५ चावला के दाम ६॥=) प्रतिमन की दर से निकालो।

यहाँ ८॥ऽ५ = ८ऽ + ॥ऽ + ऽ५

८॥ऽ५ के दाम – ८ऽ, ॥ऽ, और ऽ५ के दाम का जोड़

१ऽ के दाम = ६॥=)

८ऽ के" = ६॥=) × ८

= ५३)

∴ ॥ऽ के दाम = $\frac{१}{२}$ मन के दाम

= १ऽ के दाम का $\frac{१}{२}$

= ६॥=) का $\frac{१}{२}$

= ३।-)

और ऽ५ के दाम = २० सेर के $\frac{१}{४}$ के दाम

= २० सेर के दाम का $\frac{१}{४}$

= ३।-) का $\frac{१}{४}$

= ॥।-) ३ पाई

८ऽ, ॥ऽ, ऽ५ के दामों को जोड़ देने से हमें ८॥ऽ५ के दाम ५७=)३ मिल जाते हैं।

किन्तु संक्षिप्तता के विचार से ऊपर के सोपान आगे लिखी भाँति क्रमबद्ध किये जाते हैं :—

	रु०	आ०	पा०	
	६	१०	०	= १ऽ के दाम
			८	
	५३	०	०	= ८ऽ के दाम
॥ऽ = १ऽ का $\frac{१}{२}$	३	५	०	= ॥ऽ ,,
ऽ५ = ॥ऽ का $\frac{१}{४}$	०	१३	३	= ऽ५ ,,
	५७	२	३	= ८॥ऽ५ ,,

उदाहरण १०—२२।ऽ४॥ घी का मूल्य ३३।-)६ पा० प्रतिमन की दर से निकालो।

यहाँ २२ म० १४ से० ८ छ० = २२ऽ + ।ऽ + ऽ२॥ + ऽ२
∴ २२।ऽ४॥ के दाम = २२ऽ, ।ऽ, ऽ२॥ और ऽ२ के दामों का जोड।

ऊपर के उदाहरण की भाँति चलने से ऊपर की क्रिया इस प्रकार की जा सकती है —

	रु०	आ०	पा०
	३३	५	६ = १ऽ के दाम
			२
	६६	११	० = २ऽ ,, ,,
			११
	७३३	९	० = २२ऽ के दाम
।ऽ = १ऽ का $\frac{१}{४}$	८	५	$४\frac{१}{२}$ = ।ऽ ,, ,,
ऽ२॥ = ।ऽ का $\frac{१}{४}$	२	१	$४\frac{१}{८}$ = ऽ२॥ ,, ,,
ऽ२ = ।ऽ का $\frac{१}{५}$	१	१०	$८\frac{१}{१०}$ = ऽ२ ,, ,,
	७४५	१०	$४\frac{२९}{४०}$ = २२।ऽ४॥ ,, ,,

अभीष्ट दाम = ७४५॥=)५ (निकटतम पाई तक शुद्ध)

चूँकि ऐसी दशाओ मे तुम्हे मिश्र राशियों को समानांशों में बाँट कर दाम, तौल आदि निकालने पड़ते हैं, अतः इसमे प्रयोग होनेवाली रीति को **मिश्र-व्यवहार-गतथि** कहते हैं।

सूचना—उदाहरण १० में दी हुई वह मिश्र राशि, जिसका दाम निकालना है, निम्नलिखित समानांशों में भी विभक्त की जा सकती है। यथा—।ऽ (अर्थात् १ऽ का $\frac{१}{४}$), ४ऽ (१ऽ का $\frac{१}{१०}$) और ऽ॥ (ऽ४ का $\frac{१}{२}$)।

इससे प्रकट होता है कि मिश्र राशि के समानांश दो या और अधिक प्रकार के समानांशों के समूहों में विभक्त हो सकता है। अतः तुम्हें समानांशों के उस समूह को चुनना चाहिए जो तुमको प्रश्न की क्रिया करने में आसान मालूम पड़े।

उदाहरणमाला २७

दाम बताओ :—

(१) ३५॥ु प्रतिमन की दर से २।ऽ७। घी के।

(२) १५॥=)६ पा० प्रतिमन की दर से ६॥ऽ८॥ चीनी के।

(३) ४=) प्रतिमन की दर से ८ऽ६। चने के।

(४) ७॥ु प्रतिमन की दर से ८।ऽ६ चावलों के।

(५) ३।=)६ पा० प्रतिगज़ की दर से १२ गज़ २ फ़ी० ९ इं० रेशम के।

(६) ४ु प्रतिमन की दर से २६॥ऽ४ अरहर की दाल के।

(७) २=) प्रतिमन की दर से ३५॥ऽ७। आलुओं के।

(८) ४।ु प्रतिमन की दर से ४९।ऽ२॥ आटे के।

(९) ३०=) प्रतितोले के भाव से ३ तोले ४ माशे ४ रत्ती सोने के।

(१०) यदि रेल की एक गज़ लम्बी पटरी १॥)७॥≈ भारी हो तो ३ गज़ २ फी० ३ इं० लम्बी पटरी कितनी भारी होगी ?

(११) यदि एक बनिया १) पर ११ आने ८ पाई लाभ उठाये तो १२५०) पर कितना लाभ उठावेगा ?

(१२) कपडे की ११५ गाँठो मे कितना बोझ होगा यदि एक गाँठ की तौल २।)५॥ हो ?

(१३) चाय के १२ डिब्बो का मूल्य क्या होगा यदि एक डिब्बे मे २।)७॥≈ चाय हो और १) चाय ७५॥॥) मे आवे ?

(१४) ७॥।) प्रतिमन की दर मे ३॥।)७॥ चावलो का मूल्य निकालो।

(१५) ५ मील ३ फरलाग १६५ गज़ लम्बी सड़क के कुटवाने का क्या व्यय होगा यदि एक मील सड़क ३५६०) मे कुटती हो ?

अध्याय ५

बहीखाता या महाजनी लेखा

जो लोग किसी प्रकार का व्यापार करते हैं अथवा रुपये का लेन-देन करते हैं 'साहूकार' या 'महाजन' कहे जाते हैं। उन लोगों का रुपयों का लेन-देन या माल का क्रय-विक्रय इतना अधिक हो जाता है, कि उसका विवरण याद रखना कठिन ही नहीं बल्कि असम्भव हो जाता है, और जब तक उनके व्यवहार का ठीक ठीक हिसाब-किताब न हो, उन्हें अपनी स्थिति का न तो शुद्ध अनुमान हो सकता है और न काम में सफलता ही हो सकती है। अतः वे लोग अपना हिसाब-किताब एक विशेष प्रकार की कापियों में, जिन्हें 'बही' कहते हैं, लिखते हैं। वे कई होती हैं किन्तु मुख्य नीचे की तीन ही हैं :—

(१) कच्ची रोकड़ या रोज़नामचा, (२) पक्की रोकड़बही और (३) खाताबही।

'कच्ची रोकड़' मे प्रतिदिन के लेन-देन या क्रय-विक्रय का हिसाब तत्काल का तत्काल ही लिखा जाता है, किन्तु 'पक्की रोकड़' में जो कच्ची रोकड़ ही का सँभाला हुआ रूप है, शाम

को छाँट छाँट कर एक एक वस्तु का हिसाब ब्यौरेवार लिखा जाता है। अर्थात् एक दिन में ६, ७ बार कोई जिन्स बिकी हो तेा वह एक जगह इकट्ठी करके लिखी जायगी। इस बही में प्रतिदिन की थैली की जमा भी शाम को हिसाब बन्द करने पर लिखी जाती है।

'खाताबही' में महाजन लोग रोकड़बही से प्रत्येक, मनुष्य, प्रत्येक माल का हिसाब छाँटकर तिथिवार अलग अलग लिखते हैं, जिससे वे काम पड़ने पर हर एक का हिसाब तुरन्त बता सकें। हर एक हिसाब या लेखा 'खाता' कहा जाता है।

इन ऊपर कही हुई बहियों के काग़ज़ (पन्ने) चौड़ाई में ८ बराबर भागों में मुड़े होते हैं। इन मोड़ों से रक़मों के जोड़ने तथा ब्यौरा लिखने में कुछ सुगमता हो जाती है।

लिखते समय बही के प्रत्येक पन्ने के दो बराबर भाग करते हैं—पहले चार घरों को 'जमा' और बाद के चारों घरों का नाम 'ख़र्च या नाम' रक्खा जाता है जिसका आदर्श यह है :—

जमा				नाम			
सिरा				सिरा			
	पेटा			पेटा			

सिरा और पेटा के नाम बोलने ही में आते हैं, लिखे नहीं जाते।

पहले हम बता आये हैं कि साधारण रूप से प्रत्येक महाजन के यहाँ कम से कम ३ बहियाँ होती हैं, जिनमें से पहली दो (कच्ची व पक्की रोकड़) के लिखने का ढङ्ग एक ही है, किन्तु तीसरी 'खाताबही' बिलकुल भिन्न होती है, अतः हम रोकड़बही व खाताबही को अलग-अलग लिखेंगे।

रोकड़बही

इस बही के लिखने के लिए पहले तीन शब्दों को समझ लेना उचित है—जमा, नाम और रोकड़बाकी। 'जमा' का अर्थ यह होता है कि इतना धन किसी से अपने पास आया है अथवा थैली में उपस्थित है और 'खर्च या नाम' अपने पास से दिये जानेवाले धन अथवा किसी पर ऋण का निर्देश करता है।

रोकड़बाक़ी—रोकड़ रुपये-पैसे को कहते हैं। अतः हिसाब बन्द करते समय जितना धन थैली में होता है 'रोकड़बाक़ी' के नाम से लिख दिया जाता है, जिससे अगले दिन का हिसाब ठीक रहे।

अब हम कठिनाई के क्रम से प्रत्येक प्रकार का जमा-खर्च लिखते हैं।

नक़दी व माल का लेन-देन

उदाहरण १—ला० सीताराम अनाजवाले ने एक दिन

१२ऽ गेहूँ दर ।ऽ२ और ३०ऽ चने दर ।ऽ५ नक़द मोल लिये तो वे अपना उस दिन का हिसाब इस तरह लिखेंगे :—

जमा					नाम				

१२०) अनाजखाते नाम
४०) गेहूँ १२ऽ दर ।ऽ२
८०) चना ३०ऽ दर ।ऽ५

१२०)

उदाहरण २—ला० सीताराम जी ही ने अगले दिन २४) के गेहूँ दर ।ऽ१॥ और ७ऽ५ चना दर ।ऽ४। नक़द बेचे तो वह अपना लेखा इस तरह लिखेंगे :—

जमा					नाम				

४४) अनाजखाते जमा
२४) गेहूँ तौल ६॥ऽ६
दर ।ऽ१॥
२०) चना ७ऽ५
दर ।ऽ४।

४४)

उदाहरण ३—यदि उदा० १ व २ का लेन-देन **(क्रय-विक्रय)** एक ही दिन होता तो वह उसे आगे की तरह लिखते :—

जमा	नाम
४४) अनाजखाते जमा	१२०) अनाजखाते नाम
२४) गेहूँ तौ० ६॥।)६	४०) गेहूँ १२) दर ।)२
दर ।)१॥	८०) चना ३०) दर ।)५
२०) चना तौ० ७)५	१२०)
दर ।)४।	
४४)	

उदाहरण ४—यदि लाला जी के पास उसी दिन श्रीकृष्ण ५०) धरोहर रख गये होते तो ऊपर के हिसाब में ये रुपये 'जमा' के मध्ये यों और बढ़ जाते:—

जमा	नाम
× × ×	× × ×
५०) श्रीकृष्ण के जमा	
५०) धरोहर	

उदाहरण ५—उन्हीं लाला सीताराम जी ने हरीहर अहीर को १०) एक पैसा प्रतिरुपया माहवार ब्याज पर क़र्ज़ दिये तो ऊपर के हिसाब के साथ आगे का हिसाब और बढ़ जायगा।

जमा	नाम	
× × ×	× × ×	× × ×
× × ×		× × ×
× × ×		

१०) हरीहर अहीर के नाम
१०) नक़द)॥ रुपया
माहवारी

नियम १—ऊपर के उदाहरणों से स्पष्ट प्रकट होता है कि जो रुपया थैली में आता है 'जमा' में और जो थैली से जाता है 'नाम' में लिखा जाता है।

२—जिस मध्ये रुपया जाता है उसके 'नाम' और जिस मध्ये आता है उसका 'जमा' किया जाता है।

३—पेटे में सब विवरण लिखा जाता है, किन्तु सिरे में केवल सामान्य (मोटी) बात होती है।

अभ्यासार्थ प्रश्न

निम्नलिखित प्रश्नों का जमा-खर्च दिखाओ :—

(१) लाला कपूरचन्द बजाज से मैं ३ जोड़े धोती दर २=), गाढ़ा १२ गज दर =)॥ गज. ९ गज गबरून दर ।।-)॥ और ≡)॥। गजवाला ८ गज़ लट्ठा लाया तो बजाज़ का और मेरा जमा खर्च दिखाओ।

(२) तुम्हारे भाई ने अपने मकान के लिए २।ु७।। छड़ें दर ५।।) मन, टीन मोटी ।।ु४ दर ≡)। सेर और कब्जे ४½ दर्जन दर ।।-) दर्जन नक़द मोल लिये तो दूकानदार का और अपने भाई का जमा ख़र्च दिखाओ।

(३) सेठ बेनीप्रसाद ने गिरवर महाराज को ५०) नक़द २ प्रतिशत माहवारी ब्याज पर क़र्ज़ दिये। ३००) बैंक से मँगाये और ३२०) का कपड़ा ख़रीदा। तो सेठ का जमा ख़र्च दिखाओ।

(४) लाला भगवानदास के यहाँ ५ थान गबरून दर ८) और ४० धोती जोड़ा दर २।-) मँगाये। हरभजन २० गज़ मलमल दर ।) और २ चादरें दर १।।।), ले गया तो लाला का जमा ख़र्च दिखाओ।

उधार माल का लेन-देन

उदाहरण १—लाला विष्णुदत्त ने लाला महेशशंकर व्यापारी से २००) के गेहूँ दर ।ु२।। और १००) के चने दर ।ु६ उधार लिये तो दोनों लाला लोग अपना अपना हिसाब निम्न प्रकार से लिखेंगे :—

लाला विष्णुदत्त की रोकड़बही

जमा	नाम
३००) लाला महेशशंकर के जमा	३००) अनाजखाते नाम
२००) गेहूँ तौ० ६२।।ु दर ।ु२।।	२००) गेहूँ ६२।।ु दर ।ु२।।
१००) चना ४०ु दर ।ु६	१००) चना ४०ु दर ।ु६
३००)	३००)

लाला महेशशंकर की बही

जमा	नाम
३००) माल खाते जमा	३००) लाला विष्णुदत्त के नाम
२००) गेहूँ ६२॥) दर ।)२॥	२००) गेहूँ ६२॥) दर ।)२॥
१००) चना ४०) दर ।)६	१००) चना ४०) दर ।)६
३००)	३००)

उदाहरण २—लाला बैजनाथ की दूकान से ठाकुर शेरसिंह पैतखेड़ावाले ८०) का कपड़ा उधार ले गये और उसी दिन लाला जी की दूकान पर १ गॉठ धोती जोड़े २००) के ग्वालियर मिल से उधार आये तो लाला बैजनाथ अपनी बही में इस तरह दिखायेंगे :—

जमा	नाम
८०) कपड़ा खाते जमा	८०) शेरसिंह पैतखेड़ावाले के नाम
२००) ग्वालियर मिल के जमा	८०) कपड़ा
२००) धोती जोड़े नग ८०	२००) कपड़ा ख़रीद खाते नाम
	२००) धोती जोड़े नग ८०
२८०)	२८०)

१—ऊपर एक ही धन 'जमा' व 'नाम' दोनो में लिखा है, क्योंकि थैली से न कुछ गया और न उसमें

कुछ आया। यदि ऐसा न होता तो थैली के धन से हिसाब न मिलता।

दूसरे जो माल माल लिया है 'नाम' की ओर लिखा है और जिसके यहाँ से ख़रीदा गया है, 'जमा' मे उस आदमी के नाम से जमा किया है।

जो माल बेचा गया है, उसमे माल ने रुपया दिया, इसलिए माल का जमा हुआ, किन्तु खरीदार ने रुपया नहीं दिया, इस लिए उसके नाम (कर्ज) लिखा गया है। तात्पर्य यह कि जिसके 'नाम' लिखा जाता है (चाहे मनुष्य हो, चाहे माल) वह भविष्य म रुपया देता है।

अभ्यासार्थ प्रश्न

(१) ला० श्यामलाल पत्थरवाले ने ठा० खानसहाय ताँतपुरवाले के यहाँ से ५००) का पत्थर उधार मँगाया और लाला ने पं० रामदत्त आगरेवाले के हाथ ८०) का और मु० ईजादहुसैन के हाथ ७२॥) का पत्थर उधार बेचा, ता लाला जी की रोकड-बही लिखो।

(२) बा० रामस्वरूप भट्टेवाले ने ५००) का कोयला झेरियावालो से उधार लिया, और उन्होने २५००० ईंटे दर ८) प्रतिहज़ार ला० बालकिशन के हाथ और ४५००० ईंटे उसी दर से मुं० हरप्रसाद के हाथ उधार बेची। तो बाबू जी का हिसाब किस तरह लिखा गया होगा ?

(३) श्रीकृष्ण महाजन ने जयदयाल व्यापारी से ६००) का माल इस प्रकार उधार ख़रीदा:—२५०) की अरहर दर ।)५, २५०) गेहूँ दर ।)३ और १००) के जौ दर ।)८; और उन्होंने उसी दिन २००) के गेहूँ दर ।)२॥ और ५०) चने दर ।)६ ला० बैकुण्ठनाथ के हाथ उधार बेचे । तो महाजन साहब यह लेन-देन अपनी रोकड़बही में कैसे दिखायेंगे ?

नक़द व उधार के मिश्रित प्रश्न

(१) सेठ फूलचंद ने मिती पूस बदी ५ सं० १९८९ को ३-) की दर से ३०) चने, ५।) की दर से ४०) चावल गजाधर अनाजवाले से उधार मँगाये। ९॥) मन की १०) चीनी नक़द मँगाई। अन्तू को २०)३ गेहूँ दर ।)१ नक़द बेचे तो सेठ जी की रोकड़बही लिखो।

(२) ला० रामलाल ने १२० गज़ मलमल ।=) प्रतिगज मोल ली। दो जोड़े धोती के २।।-) की दर से और ९ गज़ गबरून ।-) की दर से लक्ष्मीनारायण के हाथ उधार बेची और उदयराम को १००) एक प्रतिशत माहवार ब्याज पर ऋण दिये तो लाला जी अपनी बही कैसे लिखेंगे ?

(३) श्रीराम महादेव की दूकान पर आज ३७५॥।=)॥ की नक़द बिक्री हुई, ९५।-) का माल रामसरन को उधार

दिया गया। ५००) का कपड़ा हरसुख बजाज के यहाँ से उधार आया और रामचन्द्र रामलीला के लिए २२५) जमा कर गये, तो रोकड़बही का आदर्श दिखाओ।

कुछ नक़द और कुछ उधार

उदाहरण १—सेठ मंगलसेन चन्द्रभान के यहाँ से घूरेलाल ने ६५॥।=) की लकड़ी लेकर ५०) नक़द दिये तो सेठ जी इसे इस प्रकार दिखायेंगे:—

जमा	नाम
६५॥।=) लकड़ी खाते जमा	६५॥।=) घूरेलाल के नाम
५०) घूरेलाल के जमा	६५॥।=) की लकड़ी

अर्थात् पहले बिलकुल उधार की भाँति मानों रुपये दिये ही नहीं और फिर नक़द की भाँति मानो कुछ देर बाद रुपये देने आये हों।

(इसमें ज्ञात से अज्ञात की ओर चलनेवाले सिद्धान्त से पाठ की नवीनता जाती रहती है, अतः विशेष नहीं लिखा जाता)।

कुछ लोग ऊपर के लेन-देन को आगे लिखे ढंग से, जो कुछ संक्षिप्त है लिखते हैं, किन्तु यह उस समय सिखाना चाहिए जब बच्चे बिलकुल अभ्यस्त हो जायँ।

दूसरा ढंग— (ऊपर ही वाले उदाहरण का)

जमा	नाम
६५॥।ᅳ) लकड़ी खाते जमा	१५॥।ᅳ) घूरेलाल के नाम ६५॥।ᅳ) की लकड़ी ५०) नक़द दिये १५॥।ᅳ) नहीं मिले सो नाम

उदाहरण २—तुमने १००) की लकड़ी खरीदी और ६०) चुकाये तो तुम अपनी बही कैसे लिखोगे ?

जमा	नाम
४०) मंगलसेन चन्द्रभान*के जमा १००) की लकड़ी ६०) नक़द दिये ४०) नहीं दिये सो जमा	**१००) लकड़ी खरीद** **खातेनाम**

इसमें जितने रुपये देने या लेने बकाया हों क्रमशः **'जमा'** **व 'नाम'** में लिखते हैं।

* यहाँ उस दूकानदार का नाम लिखो जिससे तुमने लकड़ी खरीदी है।

अभ्यास के प्रश्न

निम्नलिखित दशाओं में रोकड़बही लिखो :—

(१) तुमने १७) प्रति १०० फ़ुट के भाव से १००० फ़ुट चूना ख़रीदा और केवल १५०) नक़द चुकाये और तुमसे श्यामलाल ३६) की पुस्तके ले गया किन्तु केवल ३०) दे गया।

(२) ऊपर के प्रश्न मे यदि तुमने चूनेवाले को २००) दिया हो तो किस प्रकार लिखोगे ?

(३) राधाकृष्ण बजाज़ ने मोहनलाल बजाज़ से ८०) देकर १२५) का कपड़ा लिया और फिर उसमें से ९०) का कपड़ा कृष्णभद्र के हाथ बेच कर ८०) पाया।

(४) मैकू कुम्हार ने तुम्हारे यहाँ १५०० फ़ुट मिट्टी २) प्रति १०० फ़ुट के भाव से डाली और तुमने उसे २५) दिये। लच्छू कारीगर ने ।।≈) रोज के हिसाब से २४ दिन काम किया और तुमने २०) दिये।

ब्याज का लेन-देन

उदाहरण १—लाला कुबेरचन्द से बुद्धा चमार ५०) अगहन बदो १ को २) सैकड़ा माहवार ब्याज पर ले गया और बैसाख बदी १ को सब ब्याज चुका गया तो लाला जी बैसाख की तिथि में रोकड़ मे इस प्रकार लिखेंगे :—

जमा	नाम
५) बुद्धा चमार के जमा	५) बुद्धा चमार के नाम
५) ब्याज ५०) का दर २) सै० मा० अगहन से चैत तक	५) ब्याज ५०) का दर २) सै० मा० अगहन से चैत तक
५) ब्याज खाते जमा	
५) ब्याज ५०) का ५ महीने का २) सैकड़ा माहवार से	

उदाहरण ।—यदि बुद्धा चमार कुल रुपया चुका जाता तो इस तरह बही लिखी जाती :—

५५) बुद्धा के जमा	५) बुद्धा चमार के नाम
५०) मूल	५) ब्याज ५०) का पाँच माह का दर २) सै० मा०
५) ब्याज ५ माह दर २) सै० माह०	
५५)	
५) ब्याज खाते जमा	
५) ब्याज ५०) का ५ माह २) सै० मा०	

उदाहरण ३—यदि लाला जी को उसी दिन बैङ्क से ६०) ब्याज के मिलते तो ऊपर के हिसाब में इतना और जुड़ जाता जितना आगे दिखाया जाता है :—

जमा	नाम
६०) बैंक खाते जमा ६०) ब्याज ६ माह का २४००) का ५ सै० सा०	६०) बैंक खाते नाम ६०) ब्याज ६ मा० २४००) का दर ५ सै० साल
६०) ब्याज खाते जमा ६०) ब्याज बैंक २४००) का ६ माह दर ५ सै० सा०	

उदाहरण ४—यदि लाला कुबेरचन्द जी लाला भरोसीलाल से २००) एक रुपया सैकड़ा माहवारी के हिसाब से कर्ज लेकर ८ माह बाद आज ब्याज चुकावें तो वह इस प्रकार लिखेंगे—

जमा	नाम
१६) लाला भरोसीलाल जी के जमा (पेटा वैसा ही)	१६) ब्याज खाते नाम (पेटा ऊपर की भाँति) १६) लाला भरोसीलाल के नाम (पेटा वैसा ही)

पीछे के प्रश्नों में ब्याज लेने और देने के हिसाब पर दृष्टि डालने से ज्ञात होता है कि उधार की भाँति दोनों ओर लिखकर बाद में ब्याज खाते नाम या जमा जैसा हो वैसा

लिखते हैं। दोनों ओर इसलिए लिखा जाता है कि खाते में उतारने में हिसाब में उलटा क़र्ज़ या जमा न हो जाय।

अभ्यासार्थ प्रश्न

(१) श्रीरामशङ्कर से सुदामा ६०), ।। प्रतिरुपया माहवार ब्याज पर ले गया था। आज ८ माह बाद कुल हिसाब बेबाक कर गया। दोनों का हिसाब प्रत्येक की बही में कैसे लिखा गया होगा ?

(२) लाला रामदास को मट्टी कहार से १।) सैकड़े से ४००) के ५०) ब्याज के मिले तो लाला जी की बही लिखो।

सूचना—ऊपर की मदों के अतिरिक्त और भी कई मदें हो सकती हैं। यदि ध्यान से विचार किया जायगा तो सबका हल पीछे के सिद्धान्तों से हो जायगा। यथा:—दूकान में जो धन खर्च रहता है वह सब थैली में जाता है अतः 'नाम' मे लिखा जाता है। जिस धन का हिसाब याद नही रहता और थैली में कमी पड़ती है, अथवा जो धन वसूल नही हो पाता 'बट्टेखाते' नाम लिखा जाता है।

दूकानखर्च मे वेतन, किराया, मरम्मत, पान-तम्बाकू, दूकान-सम्बन्धी सामग्री यथा :—तेल, काग़ज़, क़लम, मज़दूरी, चिट्ठी-पत्री आदि आदि सभी सम्मिलित होता है।

अब आगे दो प्रश्न हल करके रोकड़बही का पूरा आदर्श उपस्थित किया जाता है, जिससे समय पड़ने पर सहायता भी ली जा सके।

प्रश्न १—लाला जैश्रीकृष्ण के यहाँ मिती असाढ़ सुदी ११ सं० १९९० वि० सोमवार को ५०८ गेहूँ दर ।ऽ२॥ नक़द, ३०ऽ चने दर २॥) प्रतिमन उधार बिके। लाला जी ने २ गाड़ी अरहर तौल ६७॥ऽ दर ।ऽ५ खरीदी और १२५) दिये। रामजीदास को १००) एक रुपया प्रतिसैकड़ा माहवार ब्याज पर उधार दिये। घनश्यामदास से २५) ब्याज के पाये। दूकान के लिए ।।) की बही, =) की स्याही मँगाई। एक नौकर के वेतन के १५) नकद दिये और शाम को हिसाब मे -) की कमी रही। यदि पिछले दिन दूकान मे ८००) रोकड़ हो तो उस दिन की बही लिखो।

श्रीगणेशाय नमः

पन्ना ५०

श्रीशुभ मिती असाढ सुदी ११ स० १९९० सोमवार
तदनुसार ता० ३ जुलाई १९३३ ई०।

जमा	नाम
८००) श्रीरोकड़ बाक़ी	७५) रामनरायन शाहगजवाले
२३५) माल खाते जमा	के नामे (नाम कल्पित)
१६०) गेहूँ ५०ऽ दर ।ऽ२॥	७५) चने ३०ऽ दर २॥)
७५) चने ३०ऽ दर २॥)	प्रतिमन
प्रतिमन	(खाता न० १)
२३५)	

जमा	नाम
	१८०) माल खाते नाम
(खाता नं० २)	१८०) अरहर ६७॥ऽ
१८०) श्यामसुन्दरलालजी के	दर ।ऽ५
जमा (नाम कल्पित)	(खाता न० २)
१८०) अरहर ६७॥ऽ	१२५) श्याममुन्दरलाल जी के
दर ।ऽ५ (खाता न० ३)	नामे (नाम कल्पित)
२५) घनश्यामदास के जमा	१२५) नक़द माल में
२५) ब्याज २००) का	दिये
दर १।) भादो सुदी	(खाता न० ३)
१२ से आज तक	१००) रामजीदास के नामे
(खाता न० ५)	१००) नकद १) प्रति-
२५) ब्याज खाते जमा	सै० माहवार
२५) ब्याज २००) का	(खाता न० ४)
दस माह का दर	२५) घनश्यामदास के नाम
१।) सै० माह	२५) ब्याज २००) का
(खाता न० ६)	दर १।) सै० मा०
१२६५)	भादो सुदी १२
	से आज तक
	(खाता न० ५)

जमा					नाम				

१५।।=) दूकान ख़र्च खाते
नामे
।।) बही
=) स्याही
१५) वेतन मुनीम जी
गत माह का

१५।।=)
(खाता नं० ७)
‐) बट्टा खाते नामे
(खाता नं० ८)

५२०।।≡)
७४४।‐) श्रीरोकड़ बाक़ी

१२६५)

प्रश्न २—लाला हरिगोविन्द आढ़तिये के यहाँ मिती **सावन** बदी ३ सोमवार ता० १० जुलाई १९३३ को थैली में प्रातःकाल १५३४।=) थे। लाला जी के यहाँ सेठ कल्यानचन्द की ५०) बेझर आई, उसको उन्होंने श्यामलाल के हाथ २।।।) प्रतिमन की दर से बेच दिया, जिसमें १) आढ़त ।=)। पल्लेदारी ख़र्च हुए। उसी दिन गंगाधर के १००) गेहूँ आये, जिनको उन्होंने ।)२।। के भाव में दौलतराम के हाथ बेच

दिया, जिसमें २॥) आढ़त और १) पल्लेदारी देनी पड़ी। सौदागर लोग अपना हिसाब चुका ले गये। शाम को दौलत-राम ने २५०) रोकड़ी भेजे किन्तु श्यामलाल ने कुछ नहीं दिया। लाला के यहाँ से ११००) के नोट ।) सैकड़ा बट्टा देकर एक आदमी ले गया। उसी दिन लाला जी ने ऋणीचन्द को २००) डाकख़ाने से निकाल कर १) सैकड़ा माहवार ब्याज पर उधार दिये, तो उस दिन की बही लिखो।

श्रीरामजी पन्ना ६०

श्रीशुभ मिती सावन बदी ३ सोमवार तदनुसार

ता० १० जुलाई १९३३ ई०

जमा	नाम
१५३४।=) श्रीरोकड़ बाक़ी	१३७॥) कल्यानचन्द जी के नाम
१३७॥) कल्यानचन्द जी के जमा	१) आढ़त
१३७॥) बेझर ५०ऽ	।=)। पल्लेदारी
दर २॥।) प्रतिमन	१३६=)॥। रोकडी स्वय
३२०) गंगाधर के जमा	१३७॥)
३२०) गेहूँ १००ऽ दर	३२०) गगाधर के नाम
।ऽ२॥	२॥) आढ़त
३॥) आढ़त खाते जमा	१) पल्लेदारी
१) बेझर ५०ऽ दर	३१६॥) नक़द दिये
२॥।) प्रतिमन	३२०)

जमा	नाम
२॥) गेहूँ १००ऽ दर	४५७॥) माल खाते नाम
।ऽ२॥	१३७॥) बेझर ५०ऽ
३॥)	दर २॥।) मन
(खाता नं० २०)	३२०) गेहूँ १००ऽ दर
	।ऽ२॥
	४५७॥)
	(खाता नं० २१)
४५७॥) मालखाते जमा	१३७॥) ला० श्यामलाल के नाम
१३७॥) बेझर ५०ऽ दर	१३७॥) बेझर ५०ऽ दर
२॥।) प्रतिमन	२॥।) मन
३२०) गेहूँ १००ऽ दर	(खा० नं० २२)
।ऽ२॥	३२०) लाला दौलतराम के नाम
४५७॥)	३२०) गेहूँ १००ऽ दर ।ऽ२॥
(खा० नं० २१)	(खा० नं० २३)
२५०) दौलतरामजी के जमा	२००) ऋणीचन्द के नाम
२५०) रोकड़ा	२००) ब्याज पर १) सै०
हस्तेमुनीम	माहवार
(खा० नं० २३)	(खा० नं० २५)
	१५७२॥)

जमा	नाम
२॥।) कटौती खाते जमा	१५७२॥)
२॥॥ नोट ११०० दर	३३३=) श्री रोकड़ बाक़ी
।) सैकड़ा	१९०५॥=)
(खा० न० २४)	
२००) डाकखाने खाते जमा	
(खा० न० २६)	
१९०५॥=)	

विद्यार्थियों को रोकड़बही लिखने के सम्बन्ध मे कुछ सूचनायें :—

(१) चाहे श्री रोकड़ बाक़ी दी हो या न दी हो, लिखी अवश्य जायगी। प्रश्न मे न दी हो तो मान लेना चाहिए।

(२) ब्याज के हिसाब मे दर व मूलधन तथा समय भी दिखाना अत्यावश्यक है।

(३) उधार के हिसाब-किताब में भी ऋणी या धनी का नाम (जैसा आवश्यक हो) माना जा सकता है।

(४) यदि नौकरों के खाते हो, तो रोकड़बही में इस तरह लिखे जायंगे।

जमा	नाम
× ×) नौकर के नाम से जमा	× ×) दूकान खर्च खाते नाम
(क्योंकि नौकर ने बदले	. . ..
मे काम किया है),	× × नौकर के नाम

विविध उदाहरण

(१) श्रीधर के यहाँ ८० रूमाल ।।=) की दर के भेजवाये गये। २५) सोहन दे गया। सुलेमान अत्तार के यहाँ से ५ तोले इत्र हिना ५।-) तोले आया। १५ गुलूबन्द दर ४।=) भेजे गये। हीरा १०) ले गया, ।=) धर्मार्थ खाते दिये गये। तो श्रीधर की बही लिखो।

(२) काशी के लाला गिरधारी साहू की दूकान पर ५००) का माल नक़द बिका। २५५।।) का कपड़ा बलभद्रदास बजाज़ के यहाँ से उधार आया। ७३७।=) का रेशम नक़द दाम पर मँगवाया गया और ९९=)।। का माल शेख़ कल्लू उधार ले गये। इन सबको पक्की रोकड़ में लिखो।

(३) सेठ कपूरचन्द ने नेकराम सुनार को ३ धोती जोड़े दर २।=) और १२ गज़ मलमल दर ।)।। उधार बेची। और ३६ गज़ मारकीन दर =)।।, धोती जोड़े १०, पाँच दर २।-) और पाँच दर २।।-) नक़द बेचे। लाला खौनीराम के यहाँ से २ थान मलमल दर ६) मँगाये, तो सेठ जी का रोजनामचा लिखो।

(४) तुम्हारे पास ४००) रोकड़ है। रामाधीन ने ७०) नक़द और किशनस्वरूप ने १००) के गेहूँ तुम्हारे पास भेजे। अगर तुमने उसी दिन ६०) गेंदालाल को उधार और १२) दूकान किराया दिया हो तो अपनी रोकड़बही लिखो।

(५) आत्माराम की दूकान पर सावन बदी १० सं० १९९० को श्रीरोकड़ बाक़ी ७००) थी। उस दिन कल्लू के यहाँ से १० बंडल सूत ५) फ़ी बंडल के हिसाब से आया। और उसके लिए मुनीम की मार्फ़त २०) नक़द भेजे। और १००) जगदीश को १) सै० माहवार ब्याज पर उधार दिये। अब्दुल खालिक़ बम्बईवाले के यहाँ ५० थान खद्दर ४) प्रतिथान के भाव से गये और ६ नोट दस दस रुपये के आये। दूकान पर ।।) पान तम्बाकू में, १।।) पुण्यदान मे खर्च हुए। बताओ आत्माराम अपनी बही कैसे लिखेंगे।

(६) नत्थूमल साहूकार ने श्यामलाल बजाज को ३००), ।।।) सैकड़े माहवारी ब्याज पर और फूलचन्द लवानिया को १५०), १) सै० माहवारी ब्याज पर कर्ज़ दिये। उसी दिन साहूकार जी को विधिचन्द २२५) देकर अपना हिसाब चुकता कर गया और दीनानाथ ५०) ब्याज में दे गया। साहूकार ने २७५) बैंक मे जमा कर दिये तो आज के हिसाब का जमा खर्च करो।

(७) लाला चेतनदास ने १०००) लगा कर दूकान खोली। ४००) के नोट ।) सै० बट्टा लेकर बेचे। १०० भर चाँदी दर ।।=), २० तोले सोना दर २९।।) लाला जगमोहन के यहाँ से ५००) रोकड़ा देकर मँगाया। करनसिंह २ तोले सोना दर ३०) केवल ४०) देकर ले गया। शाम को

जगमोहन के नौकर को ५०) और दिये। तो लाला चेतनदास का रोजनामचा लिखो।

८—ला० लक्ष्मीनारायण जी के यहाँ आज ३०) की पुस्तकें नक़द बिकीं और २५) की उधार। पुस्तकों पर ↿) रुपया कमीशन का दिया। लाला जी ने २०००) के नोट लक्ष्मीचन्द के यहाँ से ≈) सैकड़ा बट्टा देकर मँगाये और वे बीमा द्वारा इंडियन प्रेस इलाहाबाद को भेजे, जिसमें २॥) ख़र्च पड़ा, तो लाला जी की बही लिखो।

खाताबही

पीछे इस बही का थोड़ा-सा परिचय कराया जा चुका है। यहाँ हम रोकड़बही के आदर्श प्रश्नों में से कुछ खाते छाँट कर उनके लिखने का ढंग दिखाते हैं। ये खाते उचित स्थान छोड़ छोड़ कर लिखे जाते हैं और एक मध्य का एक ही खाता पूरे साल का होता है।

(रोकड़बही के ५० वें पृष्ठ के खाते)

खाता न० १

श्री खाता रामनरायन जी शाहगंजनिवासी सं० १९९० वि० तदनुसार सन् १९३३-३४

जमा	नाम
	७५) रोकड़पन्ना ५० मिती असाढ़ सुदी ११

खाता नं० २

श्री माल खाता सं०, १९९० या १९३३-३४

जमा———————नाम——————

२३५) रो० प० ५० मिती अषाढ़ सुदी ११

१८०) रो० प० ५० मिती अषाढ़ सुदी ११

खाता न० ३

श्री खाता श्यामसुदरलाल जी स० १९९० वि०

जमा नाम ——————

१८०) रो० प० ५० मिती अषाढ़ सुदी ११

१२५) रो० प० ५० मिती अषाढ़ सुदी ११

खाता नं० ४

श्री खाता रामजीदास जी स० १९९० वि०

जमा ——————— नाम——————

१००) रो० प० ५० मिती अषाढ़ सुदी ११

खाता नं० ५

श्री खाता घनश्यामदास जी सं० १९९० वि०

जमा	नाम
२५) रो० प० ५० मिती अषाढ़ सुदी ११	२००) बाकी आई खाता सं० १९८९ पन्ना ३६ (यह सब कल्पित है क्योंकि बिना रुपये लिये ब्याज किस बात का देता) २५) रो० प० ५० मिती अषाढ़ सुदी ११

खाता न० ६

श्री ब्याज खाता स० १९९० वि०

जमा	नाम
× × ×	× × ×
२५) रो० प० ५० मिती अषाढ़ सुदी ११	

खाता नं० ७

श्री दूकान खर्च खाता स० १९९०

जमा ——————————— नाम

१५॥=) रा० प० ५० मिती

अषाढ सुदी ११

खाता न० ८

श्री खाता बट्टा सं० १९९०

जमा ——————— नाम ———————

–) रा० प० ५० मिती

अषाढ सुदी ११

(लाला हरिगोविन्द की बही क ६० व पृष्ठ क खात)

खाता न० २०

श्री आढत खाता सन १९३३ ३४ ई०

जमा नाम ———————

३॥) रा० प० ६० ता० १०

जुलाइ

खाता नं० २१

श्री माल खाता सन् १९३३-३४ ई०

जमा	नाम
४५७॥) रो० प० ६०, १० जुलाई	४५७॥) रो० प० ६० ता० १० जुलाई

खाता नं० २२

श्री खाता श्यामलाल जी सादावादी सं० १९३३-३४

जमा	नाम
	१३७॥) रो० प० ६० ता० १० जुलाई

खाता नं० २३

श्री खाता दौलतराम जी सन् १९३३-३४ ई०

जमा	नाम
२५०) रोकड़ प० ६० ता० १० जुलाई	३२०) रो० प० ६० ता०१० जुलाई

खाता नं० २४

श्री कटौती खाता सन् १९३३-३४ ई०

जमा —— नाम

२।।।) रो० प० ६० ता० १०
जुलाई

खाता न० २५

श्री खाता ऋणीचन्द सन् १९३३-३४

जमा —— नाम

२००) रो० प० ६० ता० १०
जुलाई

खाता न० २६

श्री खाता डाकखाना १९३३-३४ ई०

जमा —— नाम

२००) रो० प० ६० ता० १०
जुलाई

अभ्यासार्थ प्रश्न

रोकड़बही के विविध उदाहरणों में जितने खाते हो सकते हों एक एक प्रश्न लेकर लिखो।

ब्याज फैलाने की महाजनी रीति

यह रीति दशमलव-द्वारा ब्याज निकालने की रीति से (जो अगली कक्षाओं में पढ़ाई जायगी) निकाली गई है। ब्याज निकालने का सिद्धान्त वही है जो तुम पीछे पढ़ चुके हो। किन्तु इस हिसाब में दिनों को महीनों की भिन्न में और आनों को रुपयों की भिन्न में नहीं बदला जाता, बल्कि उसका हिसाब कच्चे और पक्के अङ्कों-द्वारा निकाला जाता है। अङ्कों की सहायता से ब्याज के ऐसे प्रश्न भी बड़ी ही सरलता से निकल आते हैं जिनमें बड़े बड़े गुणा और भाग की आवश्यकता होती है।

जैसा हम ऊपर कह चुके हैं इस रीति से ब्याज निकालने के ढङ्ग में कोई नवीनता नहीं है; जो कुछ नई बात है वह या तो 'अङ्क' अथवा आँक* हैं या कुछ उनके अन्य दूसरे नियम हैं; अतः उन्हीं का परिचय कराना आवश्यक है।

महाजनों के यहाँ अधिकतर लेन देन माहवारी होता चला आया है। इसलिए महीने को अपनी इकाई मानकर

---

* प्रायः बोलने में यही प्रयोग किया जाता है।

उन्होने पक्के अङ्क नियत किये। यदि १) एक माह तक किसी पर क़र्ज़ रहे तो १ पक्का अङ्क होगा, यदि २) एक माह तक रहें तो २ पक्के अङ्क और ६) एक माह तक रहे तो ६ पक्के अङ्क। तात्पर्य्य यह है कि जितने रु० १ माह तक रहेंगे उतने ही पक्के अङ्क हो जायँगे। यदि वही धन दो माह तक रहे तो (जोड़ की रीति से) एक माह के दूने पक्के अङ्क हो जायँगे और ४ माह तक रहे तो एक माह के अङ्को के ४ गुने पक्के अङ्क होगे; अतः इससे यह फल निकला कि :—

मूलधन × महीनो की संख्या = पक्के अङ्को की सख्या।

यह तो आवश्यक है ही नही कि ऋणी सदा पूरे ही महीनो बाद धन चुकाये। कभी कुछ दिनो, या कुछ महीनों, कुछ दिनो में भी दे सकता है। कल्पना करो कि एक ऋणी २० दिन बाद ब्याज चुकावे तो पक्के अङ्को की सख्या १ महीने के पक्के अङ्को की संख्या का $\frac{२०}{३०}$ या $\frac{२}{३}$ होगी, किन्तु महाजन लोग ब्याज निकालने मे 'भिन्न' का प्रयोग नही करते। पहले २० से गुणा करते हैं और फिर ३० से भाग देते है अर्थात् उनकी क्रिया से भी वही बात आ जाती है। इस भाँति ३० से भाग देने के पहले जो कुछ उत्तर आता है 'कच्चे अङ्को' के नाम से बोला जाता है, अत. कच्चे अङ्क = मूलधन × दिनो की सख्या और कच्चे अक – ३० = पक्के अङ्क।

* महाजनी हिसाब मे महीना सदा ३० ही दिन का माना जाता है।

जैसे महीनों की संख्या सदैव पूर्णाङ्क नहीं होती वैसे ही धन में भी आने, पैसे हो सकते हैं। कल्पना करो कि किसी आदमी पर २५॥) ऋण है तो एक महीना रहने पर २५½ पक्के अङ्क ब्याज में होंगे। किन्तु फिर इसमें भी भिन्न आ गई। अतः ½ पक्के अङ्क को आधा × ३० यानी १५ कच्चे अङ्कों से प्रकट करेंगे। यदि ॥) के स्थान में ॥।) होते तो तीस × पौने यानी २२॥) कच्चे अङ्क होते। किन्तु जैसा कि आगे प्रकट होगा (२२॥,-१५) या (३०-२२॥) अर्थात् ७॥ कच्चे अङ्कों या ¼ पक्के अङ्क से हिसाब में बड़ा अन्तर नहीं पड़ सकता, इसलिए महाजन लोग ब्याज का हिसाब करने में :—

(१) ।=) या उससे कम दामों का ब्याज हिसाब में नहीं लगाते।

(२) ।=) से अधिक और ।॥) तक के ब्याज लगाने में केवल ॥) ही का हिसाब लगाते हैं।

(३) ।॥) से ऊपर के आनों के ब्याज लगाने में पूरा रुपया मानकर हिसाब लगाते हैं।

(४) १५ या अधिक कच्चे अङ्कों का १ पक्का अङ्क गिनते हैं और १५ से कम को बिलकुल छोड़ देते हैं।

यहाँ तक उनके कुछ नियमों का वर्णन हुआ। अब हम ब्याज के मूल भाग पर आते हैं।

यदि ब्याज की दर १) सैकड़ा माहवार दी गई है तो इसका स्पष्ट अर्थ है कि यदि १००) एक माह तक रहेंगे तो १)

मिलेगा। पीछे बताई हुई रीति से १०० × १ = १०० पक्के अङ्क हुए। इसलिए १०० पक्के अङ्को का ब्याज १) हुआ। यदि ब्याज की दर १।), १॥) या २) माहवार होता तो १०० पक्के अङ्को का ब्याज क्रम से १।), १॥) या २) होता। इससे स्पष्ट हुआ कि १ पक्के अङ्क का ब्याज दी हुई दर प्रतिशत का सौवाँ भाग हुआ और १५ कच्चे या $\frac{१}{२}$ पक्के अङ्क का उसका भी आधा यानी २०० वाँ भाग हुआ, यानी)॥ से भी कम होगा। इससे अङ्को के छोड़ने की असलियत समझ मे आ गई होगी।

उदाहरण १—३२५) का ४ माह का ब्याज १।) सैकडा माहवारी से निकालो।

३२५), ४ माह तक रहे है

३२५ × ४ = १३०० पक्के अङ्क हुए

१०० पक्के अङ्को से १३०० पक्के अङ्क $\frac{१३००}{१००}$ या १३ गुने हैं,

ब्याज १३ × १। = १६।)

उदाहरण २—ऊपर के उदाहरण मे ४ माह के साथ १० दिन और होते तो ब्याज क्या होता ?

पक्के अङ्कों की संख्या ३२५) की ४ मा० = १३००

कच्चे ,, ,, ३२५) की १० दि० = ३२५०

किन्तु ३२५० क० अ० = ३२५० – ३० पक्के अङ्क

=१०८$\frac{१}{३}$ पक्के अङ्क

=(१०८) पक्के अङ्क

∴ सब पक्के अङ्कों की संख्या = १३०० + १०८

= १४०८

अब १४०८ अङ्कों का ब्याज व्यवहार की रीति से इस प्रकार निकलेगा :—

∴ १४०८ अं० = १४०० अङ्क + ६। अङ्क + १॥। अङ्क

∵ १४०० अङ्कों का ब्याज = १०० × १४ अङ्क

का ब्याज = १४ × १) = १७॥)

और ६। „ = १०० अङ्कों के सोलहवें

भाग का ब्याज = =)।

और १॥। ” = ६। अंकों के लगभग

चौथाई का ब्याज =)।

∴ १४०८ अंकों का ब्याज = १७।-)॥

सूचना १—महाजन लोग।, ॥, ॥।, १।, १॥, २॥, ३॥, ४॥, ५॥ के पहाड़े याद कर लेते हैं क्योंकि उनसे इसमें बहुत सहायता मिलती है। और वे यह भी जानते हैं कि ५०, २५, १२॥, ६।, ३ = क्रम से १०० के आधे, चौथाई, आठवें, सोलहवें तथा ३२ वें भाग हैं।

२—जहाँ ब्याज की दर सालाना दी होती है वहाँ दर में १२ का भाग लगाकर प्रश्न हल किया जायगा। क्यों ?

अभ्यासार्थ प्रश्न

महाजनी रीति से ब्याज निकालो :—

(१) ५६) का ३ माह ७ दिन का १) सै० माहवारी की दर से।

(२) २०) का २ माह ११ दिन का)॥ प्रतिरुपया माहवारी की दर से।

(३) ३३२) का ५ माह २६ दिन का ६ प्रतिसैकड़ा सालाना की दर से।

(४) २०॥-) का १॥) सैकड़ा माहवार की दर से ९ महीने १२ दिन का।

(५) ५००) ७ महीने १० दिन का १) सै० माहवार की दर से।

(६) ५०) का २ माह १ दिन का १।॥) सै० माह० की दर से।

(७) २१६) का १० महीने का ९) सै० सालाना की दर से।

(८) २७५) का ४ महीने १४ दिन का १) सै० मा० की दर से।

चक्रवृद्धि ब्याज या ब्याज पर ब्याज भी इस हिसाब से निकल सकता है जिसके निकालने का ढङ्ग आगे के उदाहरण से प्रकट हो जायगा। इस रीति से, जैसा कि हम ऊपर कह आये हैं, वह प्रश्न जो भिन्न से कई दिनों मे भी हल नहीं होंगे, मिनटों में हल हो जाते हैं। हाँ, दशमलव-द्वारा ब्याज से तुम अवश्य ऐसी ही जल्दी कर सकोगे।

उदाहरण के लिए एक प्रश्न लिया जाता है जो उस

समय व्यवहार में आ चुका है जब ।।) के स्टाम्प पर १००) पूरे नहीं लिखे जाते थे।

उदाहरण—९९) की एक रजिस्टरी १) सै० माहवारी ब्याज पर ब्याज से की गई तो उसकी मियाद आने पर (१२ साल बाद) क्या ब्याज मिलेगा, यदि ब्याज पर ब्याज सालाना लगे ?

यहाँ पर हम बारहों साल का हिसाब न लगाकर केवल ६ ही साल के हिसाब की क्रिया से उनके हल करने की विधि प्रकट करते हैं, जिसमें पहले दो वर्षों का तो पूरा ब्योरा दिया जायगा, किन्तु बाद को संक्षिप्त क्रिया ही होगी, क्योंकि उन्हें वह किसी को दिखानी नहीं होती।

क्रिया—यदि १) ही १२ माह तक रहे तो १२ पक्के अङ्क हुए, किन्तु यहाँ ९९) रहे हैं ;

१ साल के अङ्क = ९९ × १२

= ११८८ या १२०० से १२ कम

∴ १०० अङ्कों का ब्याज १)

∴ १२०० " " १२)

∴ १२ या १२।। * ,, लगभग ≈)

∴ घटाने से ११८८ अङ्कों का ब्याज ११।।।≈)

अब चूँकि ९९) का ब्याज प्रतिवर्ष इतना ही होगा किन्तु ब्याज का ब्याज प्रतिवर्ष बढ़ता रहेगा।

---

* क्योंकि आधे अङ्क पर १ पा० से भी कम अन्तर होगा।

दूसरे वर्ष का ब्याज = ११।।।=)+११।।।=) का ब्याज।
पीछे बताई रीत्यनुसार ११।।।=) की जगह १२) का ब्याज
लगेगा।

१२ × १२ = १४४ प० अं०

१५० अङ्कों के १।।)

६ या ६। अ० ०-)

१४४ अ० १।≡)

= ११।।।=)+१।≡) = १३।-)

तीसरे साल का ब्याज = १३।-)+ इसी का ब्याज यानी
१।।)+-) अर्थात् १४।।।=)

(१३ × १२ = १५६)

चौथे साल का ब्याज १४।।।=) + १।।।)+-) = १६।।≡)

(१५ × १२ = १८० अङ्क)

इनमें ब्याज ज़बानी छोड़ा गया है

पाँचवे साल का ब्याज = १८।।=)।।।
१६।। × १२ = १९८ अङ्क, अर्थात् ब्याज़ १ पैसा कम २)
छठे साल का ब्याज = २०।।।=)
(१८।। × १२ = २२२) अङ्क

अर्थात् ब्याज = २।) -)।।

अब छः साल का ब्याज = ११।।।=)+१३।-)+१४।।।=)
+१६।।≡)+
१८।।=)।।।+२०।।।=)।।
= ९६।-)

अभ्यासार्थ प्रश्न

महाजनी रीति से ब्याज पर ब्याज निकालो—

(१) १२०) का १) सै० मा० से ४ वर्ष का।

(२) ७५) का १।) सै० मा० से ६ वर्ष का।

(३) ९९) का १॥) सै० मा० से ३ वर्ष का।

(४) २००) का ॥।) सै० मा० से ५ वर्ष का।

अध्याय ६

चक्रवृद्धि ब्याज

यद्यपि दिये हुए ऋण का ब्याज केवल मूलधन पर ही उस समय तक लगाया जाता है, जब तक वह अदा नहीं हो जाता, तथापि कभी कभी ऐसा होता है कि रुपया इस शर्त पर ऋण दिया जाता है कि ब्याज मासिक, त्रैमासिक, षट्मासिक अथवा वर्ष के अन्त में अदा किया जायगा और उस समय तक का ब्याज यदि नियत समय पर अदा न किया जायगा तो वह मूलधन में जोड़ दिया जायगा और आगे के नियत समय के लिए इस मिश्र-धन पर ब्याज लगाया जायगा। यदि ब्याज फिर भी अदा न होगा तो वह फिर मिश्र-धन में जोड़ दिया जायगा, और फिर इस मिश्र-धन पर ब्याज लगाया जायगा।

ऐसी दशा मे जब कि ब्याज नियत समय के अन्त में देय होने पर भी अदा नहीं किया जाता है तब वह मूल-धन में उस समय तक बराबर जोड़ दिया जाया करता है जब तक कि वह अदा नहीं कर दिया जाता। इस प्रकार कुल समय के लिए जो ब्याज होता है, उसे **चक्रवृद्धि ब्याज** या सूद दर-सूद कहते हैं। इसके विपरीत जब कि ब्याज ऋण चुकने तक केवल मूलधन पर ही लगाया जाता है, जैसा कि अध्याय ३ मे तुमने किया है, तो कुल समय के लिए जो ब्याज होता है, उसे साधारण ब्याज

कहते हैं। निम्नलिखित उदाहरणों से चक्रवृद्धि ब्याज का ज्ञान और अधिक स्पष्ट हो जायगा।

मान लो कि एक मनुष्य ४००) इस शर्त पर उधार लेता है कि वह ५ प्रतिसैकड़ा प्रतिवर्ष की दर से ब्याज सालाना अदा किया करेगा। यदि वह प्रतिवर्ष के अन्त में ब्याज अदा करे तो ५ रु० × ४ या २० रु० सालाना ब्याज देना पड़ेगा। परन्तु यदि वह पहले साल के अन्त में ब्याज अदा न करे तो उसे पहले साल का २०) ब्याज अदा करना होगा और दूसरे साल के लिए उसे केवल ऋण लिये हुए ४०० रु० पर ही ब्याज अदा न करना होगा वरन् उसे २० रु० पर भी ब्याज देना होगा। यह बीस रुपया ४०० रु० का पहली साल का ब्याज है और पहली साल के अन्त में अदा नहीं किया गया था। इस प्रकार दूसरे साल के लिए उसे ४२०) पर ब्याज देना होगा।

∵ १०० रु० पर एक साल का ब्याज = ५ रु०

∴ ४२० रु० „ „ = ५ रु० × $\frac{४२०}{१००}$

= २१ रु०

इस प्रकार दूसरे साल का ब्याज २० रुपये न होकर २१ रुपये होगा। इसलिए दोनों साल का कुल ब्याज (२० + २१) अर्थात् ४१ रुपये होगा। यही ४०० रुपये का दो साल का ५ प्रतिसैकड़ा की दर से चक्रवृद्धि ब्याज है। ४०० रुपये का दो साल का साधारण ब्याज ५ प्रतिसैकड़ा की दर से ५ × ४ × २ रु० अर्थात् ४० रुपये होगा।

जब नियत समय के अन्त में ब्याज देय हो जाता है तो वह मूलधन मे क्यों जोड़ दिया जाता है, इसका कारण यह है कि यदि ब्याज समय पर दे दिया जाय तो वह फिर किसी प्रकार काम में लगाया जा सकता है और इस प्रकार इस धन पर भी ब्याज पैदा किया जा सकता है।

उदाहरण १—५०० रुपये पर एक साल का ५ प्रतिसैकड़ा की दर से चक्रवृद्धि ब्याज निकालो जब कि ब्याज षट्मासिक चुकाया जाय।

चूँकि ब्याज ६ महीने के अन्त मे देय है, इसलिए एक साल में ब्याज दो बार दिया जाना चाहिए, पहली बार आरम्भ के ६ महीने के अन्त में और फिर दूसरे ६ महीने अर्थात् साल के अन्त मे।

चूँकि ब्याज की दर ५ प्रतिसैकड़ा है,

१०० रुपये पर ६ महीने का ब्याज $= \frac{५}{२}$ रुपया

५०० „ „ $= \frac{५}{२} \times ५$ रुपये

$= \frac{२५}{२}$ रु० $= १२\frac{१}{२}$ रु०

६ महीने के अन्त में ५०० रुपये का मिश्रधन (५०० $+ १२\frac{१}{२}$) रु० अर्थात् $५१२\frac{१}{२}$ रु० हो जायगा।

दूसरे ६ महीनों के लिए $५१२\frac{१}{२}$ रु० पर ब्याज निकालना चाहिए।

∵ १०० रुपये पर ६ महीने का ब्याज $= \frac{५}{२}$ रु०

∴ १ रुपये " " " $= \frac{५}{२ \times १००}$ रु०

∴ ५१२ रु० " " " $= \frac{५}{२ \times १००} \times \frac{१०२५}{२}$ रु०

$= \frac{२०५}{१६}$ रुपये

$= १२\frac{१३}{१६}$ रुपये

∴ साल भर का कुल ब्याज $= १२\frac{१}{२}$ रु० $+ १२\frac{१३}{१६}$ रु०

$= २५\frac{५}{१६}$ रु०

$=$ २५ रु० ५ आ०

∴ एक साल के अन्त में मिश्रधन ५०० रु० + २५ रु० ५ आ० अर्थात् ५२५ रु० ५ आने हो जायगा।

चक्रवृद्धि ब्याज एक दूसरी रीति से भी निकाला जा सकता है, जैसा कि नीचे के उदाहरण मे समझाया गया है।

उदाहरण २—८०० रुपये पर ६ प्रतिसैकड़ा सालाना की दर से एक साल का चक्रवृद्धि ब्याज निकालो जब कि ब्याज त्रैमासिक देय है।

चूँकि ब्याज त्रैमासिक देय है इसलिए ब्याज १ साल में ४ बार अर्थात् तीन महीने, ६ महीने, ९ महीने और साल के अन्त में देय होता है।

∵ ब्याज की दर ६ प्रतिसैकड़ा सालाना है,

∴ १०० रुपये पर ३ महीने का ब्याज $= \frac{६}{४}$ रु० $= १\frac{१}{२}$ रु०

३ महीने के अन्त मे १०० रु० का मिश्रधन $= १०० + १\frac{१}{२}$ रु०

$= १०१\frac{१}{२}$ रु०

,, ,, ,, १ रु० ,, $= \frac{१०१\frac{१}{२}}{१००}$ रु० $- \frac{२०३}{२ \times १००}$ रु०

$= \frac{२०३}{२००}$ रु०

एक रुपये का अगले ३ महीने अर्थात् ६ महीने के अन्त मे मिश्रधन – तीन महीने के अन्त के मिश्रधन का $\frac{२०३}{२००} =$ $\frac{२०३}{२००}$ रु० का $\frac{२०३}{१००}$ ।

इसी प्रकार ९ महीने के अन्त मे १ रुपये का सिश्रधन

$= \frac{२०३}{२००}$ रु० का $\frac{२०३}{२००}$ का $\frac{२०३}{२००}$, और

इसी प्रकार १२ महीने के अन्त मे १ रु० का मिश्रधन

$= \frac{२०३}{२००}$ रु० का $\frac{२०३}{२००}$ का $\frac{२०३}{२००}$ का $\frac{२०३}{२००}$

$= \frac{२९३}{२००}$ रु० का $\frac{१०३}{२००}$ का $\frac{२०३}{२००}$ का $\frac{२०३}{२००}$

८०० रुपय का १२ महीने के अन्त मे मिश्रधन

$= ८००$ रुपय का $\frac{१६९८१८१६८१}{१६००००००००}$

$= \frac{१६९८१८१६८१}{२००००००}$ रु०

$= ८४४$ रु० १ आना $५\frac{१३७९३}{३१२५०}$ पाई

$= ८४४$ रुपये १ आना ५ पाई (निकटतम पाई तक)

∴ अभीष्ट चक्रवृद्धि ब्याज = ८४४ रु० १ आ० ५ पा० − ८०० रु०

= ४४ रु० १ आ० ५ पा०

नोट—यह रीति किसी भी मूलधन का मिश्रधन निकालने में बड़ी लाभदायक है, जब कि वह मूलधन चक्रवृद्धि ब्याज से ऋण दिया जाता है।

उदाहरण २—४०० रुपये का ३ साल का ५ प्रतिसैकड़ा की दर से चक्रवृद्धि ब्याज निकालो जब कि ब्याज सालाना देय है।

चूँकि ब्याज की दर = ५ प्रतिसैकड़ा सालाना है।

∴ १०० रुपये पर १ साल का ब्याज = ५ रुपये

∴ १०० रुपये का १ साल के अन्त मे मिश्रधन = १०५ रुपये

∴ १ रु० का १ साल के अन्त में मिश्रधन $\frac{१०५}{१००}$ रु० = $\frac{२१}{२०}$ रु०

अब उदाहरण १ की तरह चलकर :—

१ रुपये का २ साल के अन्त में मिश्रधन = $\frac{२१}{२०}$ रु० का $\frac{२१}{२०}$

∴ ,, ,, ३ साल ,, ,, = $\frac{२१}{२०}$ रु० का $\frac{२१}{२०}$ का $\frac{२१}{२०}$

∴ ४०० रु० ,, ,, ,, ,, = ४०० रु० का $\frac{२१}{२०}$ का $\frac{२१}{२०}$

का $\frac{२१}{२०}$ = $\frac{९२६१}{२०}$ रु०

= ४६२ रु० ० आ० ९$\frac{३}{५}$ पा०

= ४६३ रु० ० आ० १० पा०

(निकटतम पाई तक)

उदाहरण ३—५०० रुपये का २½ साल के लिए ७½ प्रति-सैकड़ा सालाना चक्रवृद्धि ब्याज की दर से मिश्रधन निकालो।

चूँकि ब्याज की दर = ७$\frac{१}{२}$ प्रतिसैकड़ा सालाना

इसलिए १०० रुपये पर एक साल का ब्याज = ७$\frac{१}{२}$ रु०

∴ १०० रु० का १ सा० के अन्त में मिश्रधन = १०७$\frac{१}{२}$ रु०

= $\frac{२१५}{२}$ रु०

∴ १ रु० का २ सा० के अन्त में मिश्रधन = $\frac{२१५}{२ \times १००}$ रु० = $\frac{४३}{४०}$ रु०

∴ १ रु० का २ सा० के अन्त में मिश्रधन = $\frac{४३}{४०}$ रु० का $\frac{४३}{४०}$

∴ ५०० रु० ,, ,, = ५०० रु० का $\frac{४३}{४०}$ का $\frac{४३}{४०}$

= $\frac{९२४५}{१६}$ रुपये

= ५७७$\frac{१३}{१६}$ रु०

अब ५०० रुपये के २ साल के मिश्रधन को मूलधन मान कर इसमे ६ महीने का ब्याज जोड़ देने पर ५०० रुपये का २$\frac{१}{२}$ साल के अन्त मे मिश्रधन निकल सकता है; अर्थात् ५०० रु० का २$\frac{१}{२}$ साल का मिश्रधन = ५७७$\frac{१३}{१६}$ रुपये के $\frac{१}{२}$ साल का मिश्रधन

चूँकि १०० रुपये पर १ साल का ब्याज = ७$\frac{१}{२}$ रु०,

इसलिए १०० रुपये का $\frac{१}{२}$ साल का ब्याज = ७$\frac{१}{२}$ रु० का $\frac{१}{२}$

= $\frac{१५}{२}$ रु० का $\frac{१}{२}$

= $\frac{१५}{४}$ रु० = ३$\frac{३}{४}$ रु०

∴ १०० रु० का $\frac{१}{२}$ साल में मिश्रधन $= १०३\frac{३}{४}$ रु०

∴ १ रुपये „ „ $= \frac{१०३\frac{३}{४}}{१००}$ रु०

$= \frac{४१५}{४ \times १००}$ रु०

$= १\frac{३}{८०}$ रु०

∴ ५७७$\frac{१३}{१६}$ रुपये का $\frac{१}{२}$ साल में मिश्रधन $= ५७७\frac{१३}{१६}$ रु० का $१\frac{३}{८०}$

$= \frac{९२४५}{१६}$ रु० का $१\frac{३}{८०}$

$= \frac{१५३४६७}{२५६}$ रु०

= ५९९ रु० ७ आ० ८ पा०

(निकटतम पाई तक)

अभ्यास—२८

(यदि स्पष्टतया लिखा न हो तो यह समझना चाहिए कि ब्याज सालाना देय है)।

चक्रवृद्धि ब्याज से निकटतम पाई तक मिश्रधन निकालो :—

(१)	२०० रुपये का २ साल में ५ प्रतिसैकड़े की दर से।					
(२)	३०० रुपये का	३ साल में	३	„	„	।
(३)	२५० रुपये का	३ „	४$\frac{१}{२}$	„	„	।
(४)	१००० रुपये का	२$\frac{१}{२}$ „	६	„	„	।
(५)	५०० रुपये „	३$\frac{१}{२}$ „	४	„	„	।
(६)	७०० रुपये „	२ „	४	„	„	(ब्याज छमाही देना है)।

निकटतम पाई तक चक्रवृद्धि ब्याज निकालो :—

(७) ६०० रुपये का ३ साल में ६ प्र० सै० सालाना की दर से।
(८) ७५० ,, २½ ,, ४ ,, ,, ।
(९) १२०० ,, २¼ ,, ८ ,, ,, ।
(१०) २००० ,, ४ ,, ५ ,, ,, ।
(११) १००० ,, १½ ,, ६ ,, ,, जब कि ब्याज छमाही देना है।

(१२) ५००० रुपये का १¼ साल में ४ प्रतिसैकड़ा चक्रवृद्धि ब्याज की दर से जब कि ब्याज तिमाही देना है।

निकटतम पाई तक चक्रवृद्धि ब्याज और मिश्रधन दोनों निकालो :—

(१३) २०० रु० का ३ साल मे ५ प्र० सै० सालना की दर से।
(१४) २५० रु० ,, ४ ,, ६ ,, ,, ।
(१५) ५०० रु० ,, ४ ,, ४½ ,, ,, ।
(१६) ७५० रु० ,, ३ ,, ३ ,, ,, ।
(१७) ८०० रु० ,, ३ ,, ३½ ,, ,, ।
(१८) १००० रु० ,, ४ ,, ५ ,, ,, ।
(१९) १२५० रु० ,, ३½ ,, ४ ,, ,, ।
(२०) १५०० रु० ,, २¾ ,, ६ ,, ,, ।
(२१) २००० रु० ,, २¼ ,, ५ ,, ,, ।
(२२) २५०० रु० ,, ३ ,, ७½ ,, ,, ।

(२३) ४०० रुपये के ३ साल मे ४ प्रतिसैकड़ा ब्याज की दर से साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज में अन्तर निकालो।

(२४) किसी मूलधन के २ साल के साधारण ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज मे ७ रुपये ८ आने का अन्तर है। तो मूलधन क्या है जब कि ब्याज की दर ५ प्रतिसैकड़ा है ?

(२५) किसी नगर की जन-संख्या ५०००० है। यदि सालाना बढ़ती १० प्रतिसैकड़ा होती है तो ४ साल के अन्त मे उस नगर की जन-संख्या कितनी हो जायगी ?

अध्याय ७

विविध उदाहरणमाला

अभ्यास—२९

(१) एक दूकानदार ने २५०३ गज कपड़ा ९०० रुपये में मोल लिया और १०३ रुपये उसके लाने में लगे। अब उसको प्रतिगज किस भाव से बेचना चाहिए कि कुल पर ५० प्रतिशत का लाभ हो ?

(२) एक रेल के स्टेशन पर ६६२५ टिकट बेचे गये, जिनमें से इनका $\frac{३}{५}$, ९ आने प्रतिटिकट के हिसाब से और शेष ५ आने प्रतिटिकट के हिसाब से बिके। बताओ कुल टिकटों के बेचने से कितना धन इकट्ठा हुआ।

(३) $\frac{१}{७}$, $\frac{५}{२८}$, $\frac{६}{४९}$ और $\frac{२३}{१९६}$ में सबसे बड़ी और सबसे छोटी भिन्न बताओ।

(४) मैंने एक संख्या को ५ में से घटाया, जो कुछ बचा उसको ९ से भाग दिया, भागफल को ६ से गुणा किया तो १ उत्तर मिला। वह संख्या बताओ।

(५) बराबर संख्यावाले पुरुष, स्त्री और बालकों ने ७ दिन में मिलकर ३९ रु० ६ आ० कमाये। यदि प्रत्येक बालक ने

२ आने, प्रत्येक स्त्री ने ३ आने ६ पा० और प्रत्येक पुरुष ने ४ आने ६ पा० प्रतिदिन कमाया हो तो पुरुष, स्त्री और बालकों की अलग अलग संख्या बताओ।

(६) $\frac{५}{६}$ का $\frac{५}{६}$ और $\frac{७}{८}+\frac{११}{१२}-\frac{३१}{३६}$ को जोड़ो, और बताओ कि भिन्न के जोड़ और बाक़ी में समहर करना क्यों आवश्यक है।

(७) एक थैले में कुछ रुपये हैं, उनसे $१\frac{१}{२}$ गुनी दुअन्नियाँ और ४ गुने पैसे हैं। सब सिक्कों का मूल्य ३० रुपये है। तो प्रत्येक भाँति के कितने कितने सिक्के हैं?

(८) $(\frac{३}{५}+\frac{२}{३}-\frac{१}{१५})$ में $(\frac{३}{७}+\frac{१}{३}-\frac{१}{२१})$ कितनी बार सम्मिलित है, और $२\frac{१}{६}$ किस संख्या का छठा भाग है?

(९) ४ रुपये २ आने के $\frac{३}{३}$ और ७ रु० ८ आ० १० पा० के $\frac{२}{३}$ के अन्तर को इन्हीं के योग में से घटाओ, और इस अन्तर को १५ रुपये ४ आ० की भिन्न में लाओ।

(१०) एक थैली में कुछ धन भरा हुआ है। इसका $\frac{३}{५}$ भाग निकाल लेने के अनन्तर ज्ञात हुआ कि शेष का $\frac{२}{३}$ भाग ६ रुपये ११ आ० ८ पा० है। बताओ उस थैली में कुल कितना धन है।

(११) ३ रुपये ७ आ० प्रतिगज़ के भाव से कपड़ा बेचने पर एक बजाज़ को अपनी कुल लागत का $\frac{१}{१०}$ लाभ हुआ तो १०० गज़ कपड़ा उसने कितने मे मोल लिया होगा?

(१२) एक मनुष्य के मरने पर, उसकी सम्पत्ति का $\frac{3}{5}$ उसके बड़े बेटे को मिला और शेष का $\frac{3}{5}$ छोटे बेटे को। इन दोनों के भागों का अन्तर ८००० रुपया था तो उसकी पूरी सम्पत्ति का मूल्य बताओ।

(१३) एक मनुष्य अपनी सम्पत्ति का $\frac{1}{12}$ बड़े लड़के को, शेष का $\frac{7}{11}$ छोटे लड़के को और शेष भाग अपनी स्त्री को छोड़कर मरा। दोनों लड़कों के भागों का अन्तर १३१२ रु० १२ आ० १० पा० है। तो उस विधवा स्त्री को क्या मिला ?

(१४) एक छड़ का एक पाँचवाँ लाल, एक दसवाँ नारंजी, एक बीसवाँ पीला, एक तेरहवाँ हरा, एक चालीसवाँ आसमानी, एक पचासवाँ नीला और शेष भाग जो ३४३ इंच है बनफ़साई रंग का है। तो छड़ की कुल लम्बाई बताओ।

(१५) एक मनुष्य के एक लड़की और एक लड़का है। उसने अपने धन का $1\frac{3}{7}$ लड़के को दिया जिसके रुपये लड़की के रुपयों से ४०० अधिक हैं। तो उसने दोनों के लिए कुल कितना धन छोड़ा ?

(१६) एक काम को १७ मनुष्य ७२ दिन में पूरा कर सकते हैं। यदि ९ दिन काम करने के पीछे ४ मनुष्य और आ जायँ तो यह काम कितने दिन में पूरा होगा ?

(१७) जितनी देर में अ ७ मील चलता है उतनी देर में ब ५ मील चलता है तो जिस यात्रा को ब १९३ घंटे में पूरा करता है अ कितनी देर में उसे पूरा करेगा ?

(१८) यदि तार के प्रत्येक दो खम्भों में ८८ गज का अन्तर हो और एक मनुष्य रेलगाड़ी में बैठा हुआ प्रत्येक ५ सेकंड में इस बीच की दूरी को पार कर जाता हो तो प्रतिघंटा रेल की चाल बताओ।

(१९) कितने मनुष्य उस काम को १८ दिन में करेंगे जिसको १०८ आदमी २६६ दिन में करते हैं ?

(२०) यदि ७ गज कपड़े का मूल्य २६ रुपये ४ आने हो तो १५ गज का मूल्य निकालो।

(२१) एक मनुष्य का वार्षिक वेतन १९१६ रुपये ४ आने है, तो ६० दिन काम करने के बदले में उसे क्या देना चाहिए ?

(२२) यदि ५ सेर चीनी के दाम १ रुपया १४ आ० १० पा० हों तो २४ सेर चीनी के दाम क्या होंगे ?

(२३) १३ भेड़ों का मूल्य १७५ रुपये ८ आने है तो २१६० रुपये में कितनी भेड़ें आयेंगी ?

(२४) यदि एक मनुष्य ६ दिन में १५ रुपये १२ आने पैदा करता हो तो १८९ रुपये कितने दिनों में पैदा करेगा ?

(२५) यदि मैं ७ रुपये १५ आने ६ पाई में ८५ मील तक रेल में जा सकूँ तो ९ रुपये ६ आने में कितनी दूर जाऊँगा ?

(२६) एक कारीगर १२ दिन में १४ रुपये ४ आने ६ पाई कमाता है तो १८ दिन में कितना कमायेगा ?

(२७) ३५ सेर चावल के क्या दाम होंगे जब कि ३ मन २५ सेर के दाम ११ रुपये ५ आ० ३ पा० हों ?

(२८) १४ आने गजवाली फ़लालैन कितने गज आयेगी, यदि उसका दाम १२ जोड़े कम्बलों के दाम के बराबर हो, जो ९ रुपये १० आने जोड़ा मिलते हैं ?

(२९) यदि ३ रुपये १२ आने गजवाले ५० गज रेशमी कपड़े के बदले में १२० गज सूती कपड़ा मिलता हो, तो एक गज सूती कपड़े का मूल्य कितना लगाया गया ?

(३०) २ रुपये १३ आने प्रतिगजवाला कितना रेशमी कपड़ा, ३ रुपये २ आने प्रतिगज के भाव से ५४ गज सूती कपड़े के बदले में दिया जायगा ?

(३१) क और ख की मासिक आय मिल कर २७ रुपये १२ आने होती है, क और ग की २५ रुपये, ख और ग की ८० रुपये होती है। तो प्रत्येक की आय अलग अलग बताओ।

(३२) एक मनुष्य के पास १५० गायों के लिए २५ दिन को भूसा है। तो बताओ वह भूसा १२५ दिन तक के लिए कितनी गायों को होगा ?

(३३) ३ सेरवाले चाय के एक सन्दूक़ का दाम ७ रुपये ८ आने है तो ५७ रु० ८ आ० में कितने मन चाय ली जा सकती है ?

(३४) उस मनुष्य की आय क्या होगी जो ५ पाई प्रतिरुपये के हिसाब से ७९३ रुपये ९ आने ६ पाई इनकम-टैक्स देता है ?

(३५) २ रुपये ८ आने गज का कितना कपड़ा ५ थान कपड़े के बदले में, जिनमें से प्रत्येक थान १२० गज लम्बा है और १ रुपये १४ आने गज के भाव का है, दिया जा सकता है ?

(३६) यदि ६ मनुष्य एक बाड़े को १५ दिन में बना सकें तो इससे दूने बाड़े को कितने मनुष्य ४५ दिन में बना सकेंगे ?

(३७) एक रेलगाड़ी प्रतिघंटा २६ मील और एक घोड़ा-गाड़ी प्रतिघंटा ७$\frac{१}{२}$ मील चलती है। तो जिस दूरी को रेलगाड़ी ४$\frac{३}{४}$ घंटे में पूरा करती है उसे घोड़ा-गाड़ी कितने समय में पूरा करेगी ?

(३८) यदि एक मनुष्य को १ मन ३७ सेर १४ छटाँक अनाज दिया जाव तो २५ मनुष्यों के लिए कितना अनाज चाहिए ?

(३९) एक दूकानदार को कुछ अनाज बेचने में ३५ रुपये ८ आने ६ पाई की हानि हुई। यदि उसको उसने ९५६ रुपये ४ आने में लिया हो तो बताओ उसने कितने में बेचा है।

(४०) यदि एक कपड़े के बनवाने में ७ रुपये १० आ० ३ पा० लगते हों तो ३ दर्जन कपड़ों के बनवाने में कितना लगेगा ?

(४१) ५ आ० ९ पा० प्रतिगज़ के भाव से ८७ रुपये ५ आने ३ पाई में कितने गज़ छींट मिलेगी ?

(४२) यदि एक क़मीज़ मे ३$\frac{१}{२}$ गज़ छींट लगती हो तो १२ थानों मे, जिनमें से प्रत्येक थान ४७$\frac{१}{४}$ गज़ का है, कितनी कमीज़ें बनेंगी ?

(४३) एक रेलगाड़ी जो ६६ गज़ लम्बी है एक सिगनल को ३ सेकंड मे पार कर जाती है। तो गाड़ी की प्रतिघंटे की चाल क्या है ?

(४४) यदि मैं २ रु० ९ आ० ८ पा० हर सप्ताह में बचाऊँ तो १२५ रु० कितने समय मे बचा सकूँगा ?

(४५) एक लड़का प्रतिघंटे ६ मील और दूसरा ७$\frac{१}{२}$ मील चलता है। तो बताओ पहिला कितना मिनट पहले चले कि १० मील के अन्त मे दोनों मिल जायँ।

(४६) दो नावों में दौड़ हुई। इनमे से एक प्रति ५५ गज़ में दूसरी से ५ .फुट आगे बढ़ जाती है। $\frac{३}{४}$ मील के अन्त में वह कितनी बढ़ जायगी ?

(४७) २५ आदमी एक काम को १६ दिन में कर सकते हैं लेकिन ४ दिन के पीछे १५ आदमी चले गये। तो शेष काम को बाक़ी आदमी कितने दिनों में पूरा करेंगे ?

(४८) यदि ३ आदमी उतना काम करें जितना ५ लड़के करते हैं तो ५५ लड़कों का काम कितने आदमी करेंगे ?

(४९) यदि मैं प्रतिदिन ८ घंटे काम करके एक काम को ३२ दिन में कर सकूँ तो उस काम के करने में मुझको कितने दिन लगेंगे यदि मैं प्रतिदिन ६ घंटे काम करूँ ?

(५०) १ रु० ५ आ० ८ पा० गज की कितनी मलमल, ५ रु० १३ आ० ८ पा० गज की १४३ गज चिकन के बराबर होगी ?

(५१) $३\frac{५}{६}+२\frac{७}{८}+४\frac{१}{१०}$ में क्या जोड़ा जाय कि $८\frac{१}{४}$ हो जाय ?

(५२) एक मनुष्य ने आमों के टोकरे मे से पाँच आदमियों को $\frac{१}{१०}$, $\frac{१}{१२}$, $\frac{१}{१५}$, $\frac{१}{३०}$, और $\frac{१}{३६}$ भाग अलग अलग दिया। अब उसके पास ४० आम रह गये। बताओ टोकरे में कुल कितने आम थे।

(५३) किसी धन का ब्याज $६\frac{१}{४}$ वर्ष में मूलधन का $\frac{५}{८}$ होता है तो ब्याज की दर बताओ।

(५४) कौन सी भिन्न, $\frac{५}{६}$ का $\frac{३४}{१५}$ का $\frac{१३}{२०}$ में जोड़ी जाय कि १ हो जाय ?

(५५) ६० फ़ुट लम्बी रस्सी में से $४\frac{२}{१३}$ फ़ुट लम्बे, जितने टुकड़े कट सकते थे, काटे गये तो कुल रस्सी का कौन-सा भाग शेष रहा ?

(५६) यदि २७ आदमी एक काम को १५ दिन में कर सकें तो कितने आदमी और बढ़ाये जायँ कि वह काम उसी समय के $\frac{३}{६}$ में पूरा हो जाय ?

(५७) $४\frac{१}{२}$ प्रतिसैकड़ा सालाना के हिसाब से $३\frac{१}{२}$ साल में किस धन का मिश्रधन ३७६१ रुपये १४ आना होगा ?

(५८) तीसरी मार्च से २८ दिसम्बर तक $४\frac{१}{२}$ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज की दर से ३५० रुपये का क्या ब्याज मिलेगा ?

(५९) एक सिपाही एक चोर के पीछे दौड़ा। जितनी देर में सिपाही १९ गज़ चलता है उतनी देर में चोर १६ गज़ चलता है। यदि सिपाही के दौड़ने से पहले चोर १५३ गज़ चल चुका हो तो सिपाही कितने दूर दौड़ने पर उसे पकड़ पावेगा ?

(६०) एक मनुष्य को एक सम्पत्ति का $\frac{२}{३}$ का $\frac{१५}{१६}$ मिला। उसने अपने भाग का $\frac{३}{४}$ बेच कर १४१० रुपये पाये, तो कुल सम्पत्ति का मूल्य बताओ।

(६१) डाकगाड़ी ४० मील प्रतिघंटा चलती है और सवारी गाड़ी २५ मील प्रतिघंटा चलती है। तो २०० मील की दूरी सवारी गाड़ी की अपेक्षा डाकगाड़ी में जाने से कितना समय बचेगा ?

(६२) एक रेलगाड़ी प्रतिघंटा ३५ मील की चाल से जा रही है, तो एक सेकंड में कितने फ़ुट जाती है ?

(६३) यदि १००० रुपये का ५ वर्ष का ब्याज २५० रुपये हो तो १ वर्ष ६ महीने का ब्याज उसी दर से ३५०० रुपये का कितना होगा ?

(६४) यदि ४५० रुपये का ४ वर्ष में ५४० रु० मिश्रधन हो जाय तो उसी ब्याजदर से कौन-सा धन ५ वर्ष में ६३७ रु० ८ आ० हो जायगा ?

(६५) यदि ब्याज की दर एक महीने के लिए एक रुपये पर १ पाई हो तो यह प्रतिसैकड़ा सालाना क्या हुई ?

(६६) जब चावल का भाव १० सेर प्रतिरुपया है तो कुछ रुपयों से ९ मनुष्य ३० दिन तक निर्वाह कर सकते हैं। जब चावल का भाव १४ सेर प्रतिरुपया होगा तो उतने ही रुपयों में ६ मनुष्य कितने दिनों तक खा सकेंगे ?

(६७) यदि एक आदमी, जो ३$\frac{3}{4}$ मील प्रतिघंटे की चाल से चलता है, किसी स्थान पर ४ घंटे ३० मिनट में पहुँच जाय तो इस दूरी के जाने आने में उस आदमी को कितना समय लगेगा जो ३$\frac{3}{8}$ मील प्रतिघंटा चलता है ?

(६८) १$\frac{1}{4}$ रुपये का $\frac{5}{6}$ को $\frac{3}{2}$ रुपये की भिन्न में लाओ।

(६९) यदि २७ आदमी एक काम को ६३ दिन में कर सकें तो ४२ आदमी उस काम को कितने दिनों में करेंगे ?

(७०) ६$\frac{1}{4}$ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज से कौन-सा धन ३$\frac{1}{5}$ साल में ३०० रुपये हो जायगा ?

(७१) किस धन पर, ४ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज से, उतना ही ब्याज मिलेगा जितना कि $४\frac{१}{२}$ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज से २५४७५ रु० पर ब्याज मिलता है ?

(७२) कितने समय में $३\frac{१}{२}$ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज से ३५४६ रुपये ७६८३ रुपये हो जायँगे ?

(७३) कितने प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज से ४ साल में १४६२ रु० ८ आ० के १७२५ रु० १२ आ० हो जायँगे ?

(७४) $३\frac{१}{३}$ प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज से कितने समय मे ब्याज मूलधन के बराबर होगा ? और १ आना प्रति-रुपया प्रतिमाह के हिसाब से ५ वर्ष में १५० रु० का ब्याज क्या होगा ? और प्रतिसैकड़ा सालाना ब्याज-दर क्या होगी ?

(७५) एक रियासत की आय का तिहाई भाग सरकारी माल-गुज़ारी लगती है और एक चौथाई भाग नौकरों के वेतन में व्यय होता है, इसके पीछे १५०० रुपये जमींदार को लाभ के मिलते हैं, तो कुल आय निकालो।

(७६) एक मनुष्य को २००० बीघे का $\frac{३}{८}$ भाग मिला। उसने अपने हिस्से का $\frac{३}{५}$ बेच दिया, तो अब उसके पास कितने बीघे बचे ?

(७७) वह कौन-सी संख्या है जिसमें $२\frac{१}{२}$ जोड़ने से, और योगफल को $४\frac{१}{५}$ से गुणा करने से, और गुणनफल में

३ मिलाने से जो कुछ आवे उसे १$\frac{१}{६}$ से भाग देने पर भागफल २५ हो ?

(७८) ६ रुपये ६ आने का $\frac{२}{३}$, ९ रुपये ९ आने का $\frac{४}{९}$ और २$\frac{४}{५}$ रुपये को मानानुसार बढ़ते हुए क्रम से लिखो।

(७९) वह कौन-सी धन-संख्या है जिसका $\frac{५}{६}$ भाग १० रुपये १० आने १० पाई के बराबर है ?

(८०) जब किसी धन के $\frac{४}{५}$ में से ६ रुपये ६ आने ३ पाई का $\frac{२}{३}$ निकाल लेते हैं तो शेष २ रुपये ३ आने ४ पाई रह जाते हैं। उस धन को बताओ।

(८१) ५$\frac{१}{२}$ प्रतिसैकड़ा प्रतिवर्ष ब्याज की दर से किस धन से उतनी वार्षिक आय होगी जितनी कि ४$\frac{१}{२}$ प्रतिसैकड़ा प्रतिवर्ष ब्याज से २६४०० रु० पर होती है ?

(८२) किस धन से ६ प्रतिसैकड़ा प्रतिवर्ष ब्याज से ३$\frac{१}{३}$ वर्ष में, उतना ही ब्याज मिलेगा जितना कि ६६६ रुपये १० आने ८ पाई से ४ प्रतिसैकड़ा प्रतिवर्ष ब्याज से १$\frac{१}{२}$ वर्ष में मिलता है ?

(८३) एक धन ४$\frac{१}{२}$ प्रतिसैकड़ा प्रतिवर्ष ब्याज की दर से ३$\frac{१}{३}$ वर्ष में ६८६ रु० १० आ० ८ पा० हो जाता है। तो ४ प्रतिसैकड़ा प्रतिवर्ष ब्याज से ६$\frac{१}{२}$ वर्ष में वही धन कितना हो जायगा ?

(८४) यदि ४५० रुपये ४ वर्ष में ५४० **रुपये हो जायँ तो उसी** ब्याजदर से ५ वर्ष में ६३७ रुपये ८ आने किस मूलधन के हो जायँगे ? .

(८५) यदि २$\frac{१}{८}$ गज़ कपड़ा एक कोट में लगे और १$\frac{१}{६}$ गज़ एक वास्कट में और १$\frac{१}{२}$ गज़ पायजामे में लगे तो ३२$\frac{१}{४}$ गज़ कपड़े में ऐसे कितने जोड़े बनेंगे ?

(८६) यदि एक रियासत के $\frac{३}{५}$ भाग का मूल्य ३००० रुपये हो तो उसके $\frac{१}{१२}$ का मूल्य क्या होगा ?

(८७) एक मनुष्य ने अपनी सम्पूर्ण सम्पत्ति अपनी तीन लड़कियों में इस तरह बाँटी कि सबसे बड़ी को कुल का $\frac{१३}{२०}$ और सबसे छोटी को कुल का $\frac{१}{८}$ और मझली को शेष २७५० रुपये दिये। तो उसकी कुल सम्पत्ति का मूल्य बताओ।

(८८) २०० और ३०० के बीच के टिकटों की संख्या बताओ जिसमें १०, १२ और १५ खानों में रखने से प्रत्येक दशा में ५ टिकट बच रहते हैं।

(८९) सिकन्दरे से ३ आदमी चले। एक पैदल चार मील प्रतिघंटे की चाल से, दूसरा घोड़े पर ६ मी० प्रतिघंटे से और तीसरा साईकिल पर ८ मील प्रतिघंटे की चाल से। वे सब जब फ़तहपुर सीकरी में मिले तो सबने अपनी यात्रा पूरे पूरे घंटों में बताई। तो सिकन्दरे से फ़तहपुर सीकरी कम से कम कितने मील है ?

(९०) एक अनाज की ढेरी में से २॥ऽ वाली बोरी भरें तो १ऽ और २ऽ वाली बोरी भरें तो ॥ऽ अनाज बच जाता है। तो ढेरी में कम से कम कितना अनाज है।

(९१) एक आदमी ने अब से तीन वर्ष पूर्व व्यापार में कुछ रुपया लगाया। उस पर उसे १२½ प्रतिशत प्रतिवर्ष लाभ होता गया। इस समय उसके पास ७२९०) हैं। तो कितने रुपये से व्यापार आरम्भ किया होगा ?

(९२) एक नगर की आबादी पहले दो वर्षों में ५ प्रतिशत प्रतिवर्ष और फिर ४ प्रतिशत प्रतिवर्ष बढ़ी। ४ वर्ष बाद उसकी जन-संख्या क्या होनी चाहिए यदि पहले २,५०,००० रही हो ?

(९३) मैं बैंक में कितना धन जमा कर दूँ कि ३ साल बाद मुझे १७५७६) मिलें। जब कि ब्याज की दर ४ प्रतिसैकड़ा सालाना चक्रवृद्धि है ?

(९४) एक आदमी को मैंने ५ प्रतिशत प्रतिवर्ष साधारण ब्याज पर कुछ धन उधार दिया, किन्तु दूसरे को ५ प्रतिसैकड़ा प्रतिवर्ष चक्रवृद्धि पर दिया। दो साल बाद मुझे दूसरे से पहले की अपेक्षा १।॥) अधिक मिले। तो मैंने हर एक को कितना धन उधार दिया था ?

(९५) ला० श्रीराम महादेव की दूकान पर १५ जुलाई सन् १९३३ ई० को नक़द बिक्री इस प्रकार हुई :—३६ गज़ मारकीन दर ≡)॥, गबरून ३२ गज़ ।=)॥, धोती जोड़े नग ५ दर २।=)॥, उसी दिन धर्मदत्त जोशी उनसे ३५॥।) का कपड़ा उधार लेकर ३०) दे गये। लाला जी को उसी दिन हरीशंकर से ३२) ब्याज के मिले। यदि दूकान पर पान, तम्बाकू में ≡) और ─) मज़दूरी के देने पड़े हों तो उनकी उस दिन की रोकड़बही लिखो।

(९६) राजाराम की दूकान से चिरंजी अहीर ३ जून सन १९३३ को ६।≡) का कपड़ा उधार लाया। ७ जून ३३ को २५) नक़द) प्रतिरुपया माहवार ब्याज पर क़र्ज़ ले गया। ८ सितम्बर को उस दिन तक का ब्याज लाला जी को चुका गया। कपड़े के दाम ७ जून को उन्हीं २५) में मुजरा दे गया। यदि ८ दिसम्बर ३३ का पूरा हिसाब बेबाक कर आवे तो लाला जी के यहाँ चिरंजी का खाता कैसे लिखा जायगा?

निम्नलिखित प्रश्नों को व्यवहारगणित की रीति से हल करो:—

(९७) ५ बोरी सीमेण्ट कितने रुपये में आवेगा यदि एक बोरी में १।ऽ४ सीमेण्ट आता हो और १ऽ सीमेण्ट २॥) में आवे?

(९८) ५१ बोरियों में कितना आटा होगा यदि एक बोरी में २।)ा। आटा भरा हो ?

(९९) ६$\frac{३}{४}$ मन अरहर के दाम निकालो जब एक मन अरहर २≡)॥ में आवे ?

(१००) ३६॥।)२ आटे के दाम ३।-) के हिसाब से निकालो।

उत्तरमाला

पहिला भाग

अध्याय १

अभ्यास १

(१) तीन हज़ार सात सौ नौ; पचहत्तर हज़ार छियानबे; चार लाख बत्तीस हज़ार सात सौ सात; अड़तीस लाख नौ हज़ार पाँच सौ चार; एक करोड़ तीन हज़ार पाँच सौ अठानबे, नौ करोड़ सत्रह लाख छियासी हज़ार पाँच सौ बत्तीस; बत्तीस करोड़ नौ लाख छियासी हज़ार पैंतालीस। (२) ५०३६; ४३९०९; ६००२०५; ४४०००४८; ३००००३०३; ३०००००६०६। (३) ७००; ७०००, ७; ७०; ७००००; ७००००००० । (४) दाहिनी ओर से पहिले स्थान के शून्य का यह अर्थ है कि दी हुई संख्या में इकाई का कोई अङ्क नहीं है; तीसरे, पाँचवे और आठवे स्थान के शून्यों का क्रमशः यह अभिप्राय है कि दिये हुए अङ्क मे सैकड़ा, दस हज़ार और करोड़ के भी कोई अङ्क नहीं हैं। (५) ५०, ६०१, ९९८६, ६००७०, ७०८५७। (६) ७००, ५०६, ६७०, ९००९। (७) ४०। (८) ६। (९) ९, ९९, ९९९, ९९९९, ९९९९९। (१०) ९९९९९, १००००।

अभ्यास २

(१) १०० रु०। (२) १५६ (३) ४२ रु०। (४) ५३। (५) २४५ दिन। (६) ५३१ रु०। (७) ५४०० मन। (८) ३२ मन। (९) १८२ गुना। (१०) ९।

अभ्यास ३

(१) १३२७२ । (२) ३५ साल । (३) २१७०१ । (४) ११३५ रु० (५) १४६४३ । (६) २८६५६, २८१३३ (७) ३३७६ । (८) ८९९९९९ । (९) ७९७३ । (११) ४६८७५ रु० । (१२) ९ रु० (१३) ८७, ७ । (१४) ४८२६५ । (१५) ७९ । (१६) १२०७९२५६ । (१७) ९९२७३, ५५२० । (१८) २५८९८, ४८४१८, १२९४९, २४२०९, ४६७२९ । (१९) १२७६ । (२०) २१३ ।

अभ्यास ४

(१) ५४ पा०, ९९ पा०, १२९ पा०, १५० पा०, १८३ पा० । (२) ७ आ० ३ पा०, ५ आ० ६ पा०, ६ आ० ३ पा०, १० आ० ९ पा०, १२ आ० ३ पा० । (३) ४० छ०, ५३ छ०, ८६ छ०, १५५ छ० २०७ छ० । (४) २ सेर ८ छ०, ३ सेर ७ छ०, ६ सेर ११ छ०, ९ सेर ४ छ०, १२ सेर ७ छ० । (५) ३३ इ०, ५१ इ०, ८४ इ०, १३८ इ०, १६५ इ० । (६) ३ फ़ी० ४ इ०, ५ फ़ी ३ इ० ७ फ़ी० ६ इ०. ९ फ़ी० ६ इ०, १२ फ़ी० ९ इ० । (७) १७ दि०, ४१ दि०, ५१ दि०, ६४ दि०, २८० दि० । (८) ९ आ० ९ पा० । (९) २ रु० । (१०) १ रु० १२ आ० । (११) १ म० ३५ से० । ([illegible]) ३ ग० ९ इ० । (१३) १ रु० १५ आ० ६ पा०, ८ रु० ७ आ० । ([illegible]) १८ रु० । (१५) ७२ रु० । (१६) ४ आ० ६ पा० । (१७) २ आ० ४ पा० । (१८) ३ रु० ४ आ० । (१९) २४ बोतलें । (२०) [illegible] आ०, ३ पा० ।

अभ्यास ५

(१) १३६ रु० ७ आ० । (२) १३८ म० २ से० १४ छ० । (३) १०४ मी० ७ फ० १६७ ग० । (४) २४३ रु० १२ आ० । (५) ४ रु० १३ आ० ६ पा० लाभ । (६) १२१ रु० १२ आ०; ६ पा० । (७) ९ ग० २ फ़ी० ३ इ० । (८) १ म० ३६ से० । (९) १६५ रु०

६ आ० । (१०) ७४ रु० १३ आ० । (११) ५ आ० ६ पा० । (१२) ८ रु० १० आ० ६ पा० ३ रु० ५ आ० ९ रु० १५ आ० । (१३) १२० रु० ६ आ० । (१४) २४८ म० ६ से० । (१५) ४५ मील । (१६) ९ ग० १ फु० इ० । (१७) १०० चक्कर । (८) १ रु० ९ आ० ४ पा० । (१९) ७२५ रु० । (२०) ३८८८ आम । (२१) ८ गज, १ ग० १ फु० ५ इ० (निकटतम इंच तक) । (२२) ३०८० ग० । (२३) १ रु० ४ आ० २४) १४७ गज १ फु० ३ इ० (२५) १८ म० ३२ सेर ८ छ० ।

अभ्यास ६

(१) १ रु०, १ रु ८ आ०, २ रु० ४ आ० । (२) १ आ०, २ आ०, ३ आ० ६ पा०, ५ आ० ६ पा०, ६ आ० ६ पा० ८ आ०, ९ आ० ६ पा०, १० आ० । (३) ५ रु० ४ आ० । ( ) १५ रु० । (५) २२ रु० ८ आ० । (६) ४२ रु० ८ आ० । (७) १ रु० ६ आ० ६ पा० । (८) १४ आ० ९ पा० । (९) ४ रु० ८ आ० २ सेर ८ छ० १० म० १ स० ११ छ०, २ मी० ५ फ० १५ ग , २ रु० ४ आ०, १८ स० १२ छ०, ११ ग० ८ फी०, २ फी० ४$\frac{2}{7}$ इ० । (१०) ८ आ० ६ पा० । (११) ४$\frac{3}{7}$ इ० । (१२) १५ रु० । (१३) १६ हिस्स । (१४) ९ बरतन । (१५) २० रु० । (१६) २ रु० ८ आ० । (१७) १५ म ८ छ० । (१८) ६० घंटे । (१९) ८ रु० १२ आ० (२०) ५ फा० ६ इ० ।

अध्याय २

अभ्यास ७

(१) २ × २ × २ × २ । (२) २ × २ × २ × ३ । (३) २ × २ × ७ । (४) २ × ३ × ७ । (५) ३ × ३ × ३ । (६) २ × २ × ३ × ३ । (७) ३ × १३ । (८) २ × २ × ११ । (९) ३ × ३ × ५ । (१०) ७ × ७ (११) २ × ३ × ३ × ३ । (१२) २ × २ × ३ × ५ ।

(१३) ३ × ३ × ७ । (१४) २ × ५ × ७ । (१५) २ × २ × २ × ३ × ३ । (१६) ३ × ३ × ३ × ३ । (१७) २ × २ × २ × २ × २ × ३ । (१८) २ × २ × २ × १३ । (१९) २ × २ × २ × २ × ७ । (२०) २ × २ × २ × ३ × ५ । (२१) ११ × ११ । (२२) २ × २ × २ × २ × २ × २ × २ । (२३) ३ × ३ × ३ × ५ । (२४) २ × २ × ५ × ७ । (२५) २ × २ × २ × २ × ३ × ३ । (२६) २, ३ । (२७) २ । (२८) ५ । (२९) ३ । (३०) २, ३ । (३१) २, ३, ५ । (३२) २, ३ । (३३) २, ३, ११ । (३४) २, ११ । (३५) २, ३, ५, ११ । (३६) २ × ६६, ३ × ४४, ४ × ३३, ११ × १२ । (३७) ३ × ३५, ५ × २१, ७ × १५ । (३८) ११ × १७ । (३९) २ × ५६, ४ × २८, ७ × १६, ८ × १४ । (४०) ३ × ५५, ५ × ३३, ११ × १५ । (४१) २ × ७८, ४ × ३९, ३ × ५२, ६ × २६, १२ × १३ । (४२) २ × ६४, ४ × ३२; ८ × १६ । (४३) ३ × ४३ । (४४) ५ × ४१ । (४५) ३ × ७५, ५ × ४५, ९ × २५ । (४६) २ × १०४, ४ × ५२, ८ × २६, १३ × १६ । (४७) २ × १०८, ३ × ७२, ४ × ५८०, ६ × ३६, ८ × २७, ९ × २४, १२ × १८ । (४८) २ × १२०, ३ × ८०, ४ × ६०, ५ × ४८, ६ × ४०, ८ × ३०, १० × २४, १२ × २०, १५ × १६ । (४९) ३ × १२५, ५ × ७५, १५ × २५ । (५०) २ × २२५, ३ × १५०, ५ × ९०, ६ × ७५, ९ × ५०; १० × ४५, १५ × ३० ।

अभ्यास ८

(१) १, २, ३, ५, ७ । (२) ११, १३, १७, १९ । (३) २३, २९ । (४) ३१, ३७, ४१, ४३, ४७ । (५) ५३, ५९, ६१, ६७ । (६) ७१, ७३, ७९, ८३, ८९, ९७ । (७) १०१, १०३, १०७, १०९, ११३ । (८) १२७ । (९) १३१, १३७, १३९ । (१०) १४९, १५१, १५७ । (११) ३, १३ । (१२) २, ३, १३ । (१३) ५, ७ । (१४) २३, २९, ३१, ३७, ४१, ४३, ४७ । (१७) २ × ७ । (१८) २ × ११ । (१९) २ × २ × २ × ३ । (२०) २ × २ × ७ । (२१) ५ × ७ ।

(२२) ३ × १३। (२३) ३ × ३ × ५। (२४) २ × २३। (२५) ७ × ७। (२६) २ × २ × १३। (२७) ३ × १९। (२८) ३ × २३। (२९) ३ × ५ × ५। (३०) ७ × ११। (३१) ५ × १७। (३२) २ × २ × २ × ११। (३३) ५ × १९। (३४) २ × ७ × ७। (३५) २ × २ × ५ × ५। (३६) २ × २ × २ × २ × ७। (३७) २ × ३ × १९। (३८) ७ × १७। (३९) २ × २ × ३१। (४०) २ × २ × २ × २ × २ × ५।

अभ्यास ६

(१) २ × २ × ३ × ७। (२) २ × २ × २३। (३) २ × ३ × ३ × ७। (४) २ × ५ × १३। (५) ११ × १३। (६) २ × २ × २ × ३ × ७। (७) २ × ३ × ७ × ७। (८) २ × ३ × ३ × ३ × ७। (९) २ × ३ × ७ × ११। (१०) ३ × ३ × ५ × ११। (११) ३ × ५ × ५ × ७। (१२) २ × २ × २ × ३ × ५ × ५। (१३) ३ × ५ × ७ × ७। (१४) ३ × ५ × ५ × ११। (१५) २ × २ × ३ × ७ × ११। (१६) ३ × ५ × ५ × १३। (१७) २ × २ × ११ × २३। (१८) २ × २ × ३ × ७ × १३। (१९) २ × २ × १३ × २३। (२०) २ × ३ × ३ × ७ × ११। (२१) २ × २ × ३ × ७ × १७। (२२) २ × २४ × १९ × २३। (२३) २ × २ × २ × ३ × ७ × ११। (२४) ११ × १३ × १९। (२५) रूढ़। (२६) ५ × ७। (२७) रूढ़। (२८) ३ × १९। (२९) रूढ़। (३०) रूढ़। (३१) रूढ़। (३२) ३ × ३१। (३३) ३ × ३ × १३। (३४) ३ × ७ × ७। (३५) रूढ़। (३६) ३ × ६१। (३७) रूढ़। (३८) ३ × ७९। (३९) रूढ़। (४०) रूढ़। (४१) १७ × १९। (४२) ३ × १३ × १३। (४३) ३, ५, ११। (४४) ५, ७, ११। (४५) ५, ८९। (४६) ३, २५७। (४७) ३, ५, ७, ११। (४८) १०१, १०३, १०७, १०९, ११३, १२७, १३१, १३७, १३९, १४९। (४९) २ × ३ × ३ × ३ × ३; २ × २ × ७ × ७; ३ × ५ × १९; ७ × ५९; २ × २ × २ × ५ × १३। (५०) (अ) २, ३, ४, ५, ६, ९; (ब) २, ३, ४, ५, ६, ९, ११; (स) २, ३, ४, ५, ६, ८, ९, ११।

अध्याय ३

अभ्यास १० (ज़बानी)

(२१) ६। (२२) १८। (२३) १२। (२४) १२। (२५) २४।

अभ्यास ११

(१) १८, ३६, ५४, ७२, ९०। (२) २०, ४०, ६०, ८०, १००। (३) २४, ४८, ७२, ९६। (४) २७, ५४, ८१। (५) ३०, ६०, ९०। (६) ३६, ७२, १०८, १४४, १८०, २१६, २५२, २८८। (७) ४५, ९०, १३५, १८०, २२५, २७०। (८) ६०, १२०, १८०, २४०, ३००। (९) ७२, १४४, २१६, २८८। (१०) ८८, १७६, २६४। (११) ६०। (१२) ७२। (१३) ६०। (१४) ९०। (१५) ४२। (१६) ६०। (१७) ७२। (१८) ६६। (१९) ७२। (२०) ९०।

अभ्यास १२ (ज़बानी

(१) २, ३, ४, ६, १२। (२) २, ४, ६, ८, १०, १२, १४, १६, १८, २०, ३, ६, ९, १२, १५, १८, ६, २, १८ ६। (३) १२। (४) ६०। (५) ६०। (६) ६२। ७ २४ फट। (८) ११। (९) ६ रु०। (१) २४ छगाक, ४, ३ और २ बोतले। (११) १८। (१२) २४। (१३) ४० रु०। (१४) ३० सेर। (१५) २१ छटाक। (१६) ४८ गज़। (१७) १५ इ०। (१८) २८ रु०। (१९) ४२ गज (२०) ३६ फीट। (२१) ६० रु०। (२२) ४२ सर। (२३) २४। (२४) ८०। (२५) ६०।

अभ्यास १३

(१) ४८। (२) १४०। (३) १०८। (४) ७२ रु०। (५) १८९ रु०। (६) ८४ मन। (७) ३१५ मन। (८) १८० रु०। (९) ५२५ रु०। (१०) ७२। (११) १८००। (१२) ३०८० फीट। (१३) ५४० फीट। (१४ २०। (१५) १५७५ सेर। (१६) ७ रु०

८ आने। (१७) १०५० रु०। (१८) ५००। (१९) ३१७५२।
(२०) १५१२। (२१) २८८। (२२) ७२। (२३) ~~७२ गज~~। २१
(२४) ३३७ रु० ८ आ०। (२५) ५ सेर। (२६) ७२ गज।
(२७) ३४७०। (२८) ११६८। (२९) ८१५०। (३०) २६००।

अध्याय ४

अभ्यास १४

(१) $\frac{१}{४}$, $\frac{३}{८}$, $\frac{१}{[illegible]}$, $\frac{५}{८}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{२}$, $\frac{११}{१६}$, $\frac{७}{१८}$, $\frac{१३}{१६}$, $\frac{११}{१६}$। (२) $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{५}{८}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{३}{८}$, $\frac{३}{१६}$, $\frac{१}{८}$, $\frac{३}{१६}$, $१\frac{१}{४}$, $\frac{५}{८}$। (३) $\frac{३}{४}$, $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{७}{८}$, $\frac{५}{८}$, $\frac{३}{८}$, $\frac{१}{८}$, $\frac{१५}{१६}$, $\frac{१३}{१६}$, $\frac{११}{१६}$, $\frac{०}{१६}$, $\frac{७}{१६}$, $\frac{५}{१६}$। (४) $\frac{१}{२}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{७}{[illegible]}$, $१\frac{५}{८}$, $\frac{३}{८}$, $\frac{११}{१६}$, $\frac{९}{१६}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{[illegible]}{८}$, $\frac{३}{४}$। (५) ४, ६, ७, ९, १२। (६) ८, ९, ११, १०, १२, १३, १६, २३, २४। (७) १६, २२, ४८, १७, १८, २०, २४, २८, ३५, ३७, ३८, ३९, ४१, ५८, ६०, ६२, ६३।

अभ्यास १५

(१) १ इंच, $\frac{३}{८}$ इंच, [illegible] इंच, $\frac{१}{४}$ इंच, $\frac{११}{१६}$ इंच $\frac{९}{१६}$ इंच, $\frac{१३}{१६}$ इंच, [illegible] इंच, $१\frac{१}{४}$ इंच $१\frac{१}{[illegible]}$ इंच (३) [illegible] इंच, $\frac{३}{८}$ इंच, $\frac{१}{८}$ इंच, $\frac{३}{१६}$ इंच, १ इंच, $\frac{३}{१६}$ इंच, $\frac{३}{१६}$ इंच, $\frac{[illegible]}{४}$ इंच, $\frac{७}{[illegible]}$ इंच, $\frac{१}{१६}$ इंच। (४) [illegible] इंच, [illegible] इंच, $\frac{३}{८}$ इंच, $\frac{१}{[illegible]}$ इंच, [illegible] इंच, $\frac{१०}{१६}$ इंच, $\frac{१५}{[illegible]}$ इंच $\frac{[illegible]}{१६}$ इंच। (५) $\frac{१}{२}$ इंच, $\frac{३}{४}$ इंच, १ इंच, $२\frac{३}{[illegible]}$ इंच, $\frac{१}{४}$ इंच, $\frac{१}{[illegible]}$ इंच, $१\frac{१}{[illegible]}$ इंच, $२\frac{७}{१६}$ इंच। (६) ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, १०। (७) ४, ८, १२, ६, ५, ११। (८) १६, ४०, ९, १०, ११, १२, १५, २२, २२, २३, ३६, २४।

अभ्यास १६

(१) ६ गेंदें, ९ गेंदें, ४ कलमें, ४ किताबें। (२) ३ लड्डू, ६ पैसे, ६ पैसे। (३) ३ गज, ३ गज, १० गज, १८ फ़ी। (४) ११ पैसे। (५) ९६। (६) ५। (७) २ रु० १ आ०। (८) १६ पैसे। (९) ८० रु०। (१०) २१ लड़के। (११) ४५। (१२) २०।

(१३) १०$\frac{१}{२}$ आने। (१४) १०$\frac{३}{४}$ आने। (१५) ७$\frac{१}{४}$ आने। (१६) ८$\frac{१}{२}$ आने। (१७) १ रु० १५ आने। (१८) १ आना। (१९) ८ आ०, ४ आ०, २ आ०, १ आ०। (२०) ८ छ०, ४ छ०, २ छ०, १ छ०।

अभ्यास १७

(१) $\frac{२}{३}$, १, १, $\frac{२}{३}$, १$\frac{१}{६}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{१}{१२}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{१}{४}$, १$\frac{१}{४}$। (२) $\frac{२}{३}$ $\frac{१}{२}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{१}{६}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{१}{६}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{११}{१२}$, $\frac{७}{१२}$, $\frac{५}{१२}$, $\frac{१}{१२}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{६}$, $\frac{५}{३}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{१२}$, $\frac{१}{१२}$, $\frac{५}{१२}$, $\frac{५}{१२}$। (३) $\frac{२}{३}$, १, २, $\frac{१}{३}$, २$\frac{१}{२}$, $\frac{१}{६}$, $\frac{१}{३}$, $\frac{५}{६}$, १$\frac{१}{४}$, १$\frac{२}{३}$,। (४) $\frac{१}{६}$, $\frac{१}{६}$, $\frac{१}{६}$, $\frac{२}{९}$, $\frac{१}{९}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{६}$, $\frac{२}{५}$, $\frac{१}{६}$, $\frac{१}{१२}$।

अभ्यास १८

(१) १$\frac{१}{३}$ इंच, $\frac{२}{३}$ इंच, $\frac{१}{३}$ इच, $\frac{१}{६}$ इंच, $\frac{२}{३}$ इंच, $\frac{१}{२}$ इच, $\frac{५}{६}$ इंच। $\frac{१}{६}$ इंच, $\frac{१}{६}$ इंच, $\frac{१}{२}$ इंच १$\frac{५}{१२}$, इच, $\frac{३}{४}$ इंच, $\frac{५}{६}$ इंच, $\frac{११}{१२}$ इच, $\frac{५}{१२}$ इंच, $\frac{५}{१२}$ इच, $\frac{११}{१२}$ इंच, $\frac{७}{१२}$ इंच, $\frac{५}{६}$ इंच, $\frac{१}{३}$ इच। (२) $\frac{१}{२}$ इंच, $\frac{५}{६}$ इंच, $\frac{५}{१२}$ इच, $\frac{७}{१२}$ इच, २$\frac{१}{३}$ इंच, $\frac{१}{१२}$ इंच,। (३) $\frac{२}{३}$ इच, $\frac{२}{३}$ इंच, १$\frac{२}{३}$ इंच, १ इंच, २ इंच, २$\frac{१}{२}$ इंच, $\frac{१}{४}$ इंच, १$\frac{१}{६}$ इंच, १$\frac{१}{३}$ इंच। (५) $\frac{५}{६}$ इंच $\frac{१}{६}$ इंच, $\frac{१}{३}$ इंच, $\frac{१}{१२}$ इच, $\frac{१}{६}$ इच, $\frac{१}{६}$ इंच, $\frac{५}{१२}$ इंच, $\frac{१}{६}$ इंच।

अभ्यास १९

(१) ६ पा० १२ किताबें, ४ अमरूद, ८ पैसे, २१ मन। (२) १५ गज़, १० फ़ीट, २१ इंच। (३) १ रु० का $\frac{३}{६}$ = १ रु० का $\frac{६}{१२}$, १ फ़ुट का $\frac{२}{३}$ = १ फ़ुट का $\frac{८}{१२}$, १ दिन का $\frac{२}{६}$ = १ दिन का $\frac{४}{१२}$, $\frac{१०}{१२}$ आ० = $\frac{५}{६}$ आ० (४) $\frac{१}{२}$ = $\frac{२}{४}$ = $\frac{३}{६}$ $\frac{४}{८}$ = $\frac{६}{१२}$; $\frac{१}{४}$ = $\frac{३}{१२}$ = $\frac{४}{१६}$; $\frac{३}{४}$ = $\frac{६}{८}$ = $\frac{९}{१२}$ = $\frac{१२}{१६}$; $\frac{५}{६}$ = $\frac{१०}{१२}$; $\frac{७}{८}$ = $\frac{१४}{१६}$। (५) १८ आम। (६) २० खिलौने। (७) २२ फूल। (८) १५ गायें। (९) ३०, ६। (१०) ५$\frac{१}{३}$ रु०। (११) ३५ रु०। (१२) १४४ रु०। (१३) १०$\frac{१}{४}$ आ०। (१४) ३$\frac{५}{६}$ घंटे (१५) ३$\frac{१}{२}$ गज़। (१६) ४ पा०, २ पा०, १ पा०। (१७) १ फ़ुट, ६ इंच, ३ इंच। (१८) $\frac{१}{३}$, $\frac{१}{६}$, $\frac{१}{१२}$। (१९) १ रु० ३ आ०, २ रु०

८ आ०, ९ छ०-कि, ५ से० १० छ०, ९ इंच, २ १/२ गज। (१०) १६ घं०, ४ घं०, २० घं०, १४ घं०, २२ घं०।

अभ्यास २०

(१) ३/८; १; ३/१०; ३/१०; ७/१०; १/१०; १/१०; १/२ (२) ४/८; २/५; ७/१०; ३/१०; १/८; ३/१०; १ १/२, ३/१० (३) २/८; ४/८; १ १/८; ४; १/८; ३/८; ३; ४/८ (४) १/८; १/८; १/८; १/१०; ३/१०; २/८; १/८; १/८।

अभ्यास २१

(१) ३/८ इंच; ४/८ इंच; १ इंच; १/२ इंच; १ १/१० इंच; १ इंच; १/२ इंच; ३/१० इंच (२) २/५ इंच; १/१० इंच; ४ १/१० इंच; ३/१० इंच, १ १/१० इंच; ३/८ इंच; ७/१० इंच; १/१० इंच (३) ४/८ इंच; ४ इंच; ३/८ इंच; ४/८ इंच; १ १/८ इंच; ३ इंच (४) १/५ इंच; १/८ इंच; १/१० इंच; २/८ इंच; ३/१० इंच १/१० इंच।

अभ्यास २२

(१) ४ गेंदें, ६ आम, १२ कलम, २० पेंसिलें, (२) ३ लड़के, १२ नारंगियाँ, ७ रु० १८ पैसे (३) २/८ = ४/१० = २/८; १/२ = ५/१०; १/८ = २/१०; ४/८ = ६/१० (४) १९ आम (५) ११ लड़के (६) २७ खिलौने (७) ४० लडडू (८) ६ २/५ मन (९) ४ १/१० घंटे (१०) १४ आम (११) ३ १/२ इंच; ३ ७/१० मन; ४ १/१० मन; ४ १/२० घंटे; ४ १/२ घं०; ७ २/८ मिनट (१२) १ इंच; ७/१० इंच; १ १/१० मन; १ ७/१० मन; १ १/२ घंटा; १ ७/१० घं० (१३) ४) (१४) ६॥) (१५) ८ घंटे (१६) ४३) (१७))८,)४ (१८) १/८, १/१० (१९) ।)६; १)८; ॥।)६; ५६ मि०; ॥।)३; १ घं० ४५ मि० (२०) ।)६; ॥)४; ।)२; ॥।)६; ४८ मि०; १८ मि०; २४ मि०

अभ्यास २३

(१) ।≡) (२) ॥=) (३) ।)४ (४))३ (५) १)८ (६) १)४ (७) ॥।)२ (८) ।)५ (९) ७ मिनट (१०) २२ मिनट (११) १८

सेकण्ड (१२) १६ सेकण्ड (१३) ५ घं० (१४) १२ घंटे (१५) २ दिन (१६) ५ दिन (१७) ।−) (१८) १ दिन ४ घ० (१९) ७ इ० (२०) १ गज २ फ़ीट (२१) १ फर्लाङ्ग ६० गज (२२) १६०० गज़ या ७ फर्लाङ्ग ६० गज (२३) ७०० गज़ (२४) १ घं० ५ मिनट (२५) ८ घं० ५६ मिनट (२६) १ घं० २४ मिनट (२७) ॥=) (२८ ८॥−) (२९) १॥) (३०) १॥=) (३१) १॥।ऽ६। (३२) ॥।ऽ (३३) २५ मिनट (३४) १ घं० ३५ मिनट (३५) १ गज १ फ़ुट ८ इ० (३६) ३ गज १ फ़ुट (३७) ऽ६॥।= (३८) ऽ४॥≡ (३९) २ हफ़्ता १ दिन (४०) १ दिन १९ घ० २० मिनट।

अभ्यास २४

(१) (१) मिश्र संख्या (२) विषम भिन्न (३) सम भिन्न (४) सम भिन्न (५) मिश्र संख्या (६) सम भिन्न (७) सम भिन्न (८) मिश्र संख्या (९) मिश्र संख्या (१०) विषम भिन्न (११) सम भिन्न (१२) मिश्र संख्या (१३) मिश्र संख्या (१४) विषम भिन्न (१५) सम भिन्न (१६) विषम भिन्न (१७) विषम भिन्न (१८) विषम भिन्न (१९) सम भिन्न (२०) सम भिन्न

(२) (१) $\frac{७}{४}$ रु० (२) $\frac{७३}{१०}$ मन (३) $\frac{७१}{१६}$ सेर (४) $\frac{१७}{६}$ गज (५) $\frac{२९}{१२}$ फीट (६) $\frac{४३}{११}$ (७) $\frac{४९}{१५}$ (८) $\frac{८०}{१९}$ (९) $\frac{४७}{२०}$ (१०) $\frac{२६}{२१}$

(३) (१) $३\frac{१}{२}$ रु० (२) $८\frac{९}{१०}$ मन (३) $७\frac{३}{४}$ सेर (४) $१६\frac{२}{३}$ गज (५) $२\frac{२}{३}$ फीट (६) $१२\frac{१}{१२}$ (७) $३\frac{४}{१३}$ (८) $३\frac{७}{२०}$ (९) १५० (१०) $३\frac{७}{१८}$।

(४) (१) ५॥।ऽ (२) ऽ७॥≡ (३) ९=) (४) ९॥।−)४ (५) १६ गज १ फ़ुट (६) २ गज २ गि ह (७) ७ घंटे ४८ मि० (८) १६ घं० ३० मि० (९) $११\frac{२}{५}$ इंच (१०) ३ दिन ३ घं०।

(५) (१) $४\frac{२}{३}$ गज, $९\frac{२}{३}$ गज (२) $१\frac{११}{१२}$ फ़ुट; $४\frac{१}{१२}$ फ़ुट (३) $२\frac{३}{१६}$ सेर, $३\frac{११}{१६}$ सेर (४) $२\frac{११}{१६}$ रु०; $५\frac{१५}{१६}$ रु० (५) $१२\frac{१}{६}$ आने; $१५\frac{५}{१२}$ आने।

(६) (१) $\frac{२५८}{२३}$ (२) $\frac{६४१}{२१३}$ (३) $\frac{३४७}{१९}$ (४) $\frac{४८७}{८}$ (५) $\frac{६९८}{६३}$
(६) $\frac{१४६८}{३६८}$ (७) $\frac{५९८}{३८}$ (८) $\frac{१७९}{४८}$ (९) $\frac{२५०२}{६९७}$ (१०) $\frac{१६०६}{४४९}$
(७) (१) $३\frac{२}{३}$ (२) $१५\frac{५}{२८}$ (३) $१\frac{८९}{२८४}$, (४) $१\frac{६८}{३४७}$ (५) $१\frac{९७}{१६३}$
(६) २५ (७) $४९\frac{१६}{४९}$ (८) $१४\frac{३५०}{४८१}$ (९) $८८\frac{३८३}{३४७}$
(१०) $१३६\frac{५}{१२४}$ ।

अभ्यास २५

(१) $\frac{३}{४}$ रु० = $\frac{६}{८}$ रु० = $\frac{९}{१२}$ रु० = $\frac{१२}{१६}$ रु० = $\frac{१५}{२०}$ रु० = $\frac{१८}{२४}$ रु०
(२) $\frac{२}{३}$ फुट = $\frac{४}{६}$ फुट = $\frac{६}{९}$ फुट = $\frac{८}{१२}$ फुट = $\frac{१०}{१५}$ फुट = $\frac{१२}{१८}$ फुट
(३) $\frac{३}{५} = \frac{६}{१०} = \frac{९}{१५} = \frac{१२}{२०} = \frac{२१}{३५} = \frac{१५}{२५} = \frac{३०}{५०}$ (४) $\frac{१८}{३६}, \frac{२४}{३६}, \frac{२७}{३६}, \frac{६}{३६}, \frac{३}{३६}$ (५) $\frac{३६}{४८}, \frac{१६}{४८}, \frac{१८}{४८}, \frac{२८}{४८}, \frac{२७}{४८}$ (६) ५, ४, ६ (७) ८, ६, १०
(८) (१) $\frac{३६}{४८} = \frac{१२}{१६} = \frac{३}{४}$ (२) $\frac{३०}{३६} = \frac{१५}{१८} = \frac{५}{६}$ (३) $\frac{४०}{४८} = \frac{२०}{२४} = \frac{१०}{१२} = \frac{५}{६}$
(९) (१) $\frac{५}{६}$ (२) $\frac{३}{५}$ (३) $\frac{३}{५}$ (४) $\frac{६}{७}$ (५) $\frac{५}{६}$ (६) $\frac{५}{६}$ (७) $\frac{३}{४}$ (८) $\frac{२}{३}$
(९) $\frac{१}{८}$ (१०) $\frac{२}{५}$
(१०) (१) $\frac{५}{८}$ रु० (२) $\frac{७}{८}$ रु० (३) $\frac{३}{४}$ फुट (४) $\frac{१}{२}$ गज (५) $\frac{३}{८}$ सेर (६) $१\frac{१}{३}$ सेर (७) $\frac{३}{८}$ मन (८) $\frac{५}{८}$ मन (९) $१\frac{१}{५}$ मन (१०) $२\frac{१}{६}$ आना।

अभ्यास २६

(१) $\frac{६}{१०८}, \frac{३०}{१०८}, \frac{३३}{१०८}, \frac{८१}{१०८}, \frac{७२}{१०८}, \frac{९०}{१०८}$ (२) $\frac{४०५}{५४०}, \frac{३६०}{५४०}, \frac{४५०}{५४०}$,
$\frac{२४०}{५४०}, \frac{४२०}{५४०}, \frac{२३४}{५४०}, \frac{१२८}{५४०}, \frac{२७३}{५४०}$ (३) $\frac{१५६}{५६४}$ (४) $\frac{४५०}{८१०}$ (५) $\frac{३}{५}$
(६) $\frac{१३}{१४}$ (७) $\frac{५}{६}$ (८) $\frac{३}{५}$ (९) $\frac{४२}{४५}$ (१०) $\frac{२}{५}$ (११) $\frac{११}{२१}$ (१२) $\frac{२}{५}$
(१३) $\frac{४५}{९७}$ (१४) $\frac{११}{१३}$ (१५) $\frac{१}{२}$ (१६) $\frac{१७३}{३२५}$ (१७) $\frac{६}{७}$
(१८) $\frac{२७}{३७}$ (१९) $\frac{३५}{५५}$ (२०) $\frac{४४४}{८५१}$ (२१) $\frac{१४}{३७}$ (२२) $\frac{७}{१५}$ (२३)
$\frac{७२५}{२५६}$ (२४) $\frac{१०१}{५४०}$ (२५) $\frac{३}{५}$ (२६) $\frac{३७}{४१}$ (२७) $\frac{१२३}{१४७}$ (२८) $\frac{१}{४}$
(२९) $\frac{७५}{४}$ (३०) $\frac{८}{२५}$ ।

अभ्यास २७

(१) $\frac{२४}{४०}, \frac{२५}{४०}$ (२) $\frac{४}{१२}, \frac{१०}{१२}, \frac{७}{१२}$ (३) $\frac{११}{१५}$ (४) $\frac{१४}{१५}$ अधिक है

(५) सबसे बड़ी $\frac{१}{७}$; सबसे छोटी $\frac{१२}{१४}$ (६) $\frac{३}{२०}$ मन (७) भाई
(८) $\frac{१२}{८४}$, $\frac{७७}{८४}$, $\frac{५४}{८४}$, सबसे बड़ी $\frac{११}{१२}$, सबसे छोटी $\frac{१}{७}$
(९) (१) $\frac{२७}{३६}$, $\frac{२८}{३६}$, $\frac{१२}{३६}$ (२) $\frac{३}{८}$, $\frac{७}{८}$, $\frac{४}{८}$ (३) $\frac{१}{१५}$, $\frac{४}{१५}$ (४) $\frac{८}{२४}$, $\frac{६}{२४}$, $\frac{१५}{२४}$ (५) $\frac{२१}{३६}$, $\frac{२६}{३६}$ (६) $\frac{७०}{९०}$, $\frac{४८}{९०}$, $\frac{६३}{९०}$ (७) $\frac{८}{४०}$, $\frac{३५}{४०}$, $\frac{१२}{४०}$
(८) $\frac{४५}{६०}$, $\frac{५०}{६०}$, $\frac{१२}{६०}$ (९) $\frac{२४}{३०}$, $\frac{१४}{३०}$ (१०) $\frac{४५}{९०}$, $\frac{५४}{९०}$, $\frac{४०}{९०}$, $\frac{७५}{९०}$
(१०) (१) $\frac{१}{२}$, $\frac{११}{२८}$, $\frac{८}{२१}$ (२) $\frac{५}{६}$, $\frac{७}{१०}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{३}{५}$ (३) $\frac{४}{५}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{३}{८}$ (४) $\frac{७}{९}$, $\frac{२}{३}$, $\frac{८}{१६}$, $\frac{२}{५}$ (५) $\frac{१७}{१८}$, $\frac{३}{४}$, $\frac{८}{१३}$ (६) $\frac{११}{१५}$, $\frac{७}{१०}$, $\frac{२}{३}$ (७) $\frac{७}{८}$, $\frac{५}{६}$, $\frac{३}{४}$
(८) $\frac{३}{११}$, $\frac{१}{५}$ (९) $\frac{४}{९}$, $\frac{८}{२५}$ (१०) $\frac{७}{१०}$, $\frac{७}{१२}$, $\frac{१}{२}$, $\frac{४}{९}$।

अभ्यास २८

(१) $\frac{३}{८}$, $\frac{७}{१८}$, $\frac{१०}{२१}$, $\frac{१५}{२८}$ (२) $\frac{२}{९}$, $\frac{५}{१८}$, $\frac{७}{२४}$, $\frac{५}{१६}$ (३) $\frac{२}{५}$, $\frac{७}{१५}$, $\frac{११}{२१}$, $\frac{२}{३}$ (४) $\frac{७}{१५}$, $\frac{३७}{८१}$, $\frac{२५}{६६}$, $\frac{७७}{९०}$ (५) $\frac{६९३}{१४८५}$, $\frac{६०५}{१४८५}$, $\frac{१३१५}{१४८५}$, $\frac{७६५}{१४८५}$
(६) $\frac{३१५}{५२५}$, $\frac{३४५}{५२५}$, $\frac{१६८}{५२५}$, $\frac{१६५}{५२५}$ (७) $\frac{२४५}{८४०}$, $\frac{२२४}{८४०}$, $\frac{११२}{८४०}$, $\frac{५२५}{८४०}$
(८) $\frac{१२८}{२४०}$, $\frac{८८}{२४०}$, $\frac{७५}{२४०}$, $\frac{५५}{२४०}$ (९) $\frac{४५६०}{५८८०}$, $\frac{३८६४}{५८८०}$, $\frac{५१४५}{५८८०}$, $\frac{३३६०}{५८८०}$, $\frac{७६६०}{५८८०}$ (१०) $\frac{७५}{१८०}$, $\frac{७८}{१८०}$, $\frac{११०}{१८०}$, $\frac{१३५}{१८०}$, $\frac{४८}{१८०}$, (११) $\frac{५४४}{१६३८०}$, $\frac{१२९१५}{१६३८०}$, $\frac{४३२०}{१६३८०}$, $\frac{३२४०}{१६३८०}$ (१२) $\frac{६९०}{१३२०}$, $\frac{९००}{१३२०}$, $\frac{२२८}{१३२०}$, $\frac{३००}{१३२०}$, $\frac{१८७}{१३२०}$ (१३) $\frac{१८७२}{२१६०}$, $\frac{१४८५}{२१६०}$, $\frac{१५६०}{२१६०}$, $\frac{११८८}{२१६०}$, $\frac{१५३०}{२१६०}$, $\frac{१२८०}{२१६०}$, (१४) $\frac{६९३००}{९९३६०}$, $\frac{६५५२०}{९९३६०}$, $\frac{७६२२३}{९९३६०}$, $\frac{३०४८६}{९९३६०}$, $\frac{६६५६०}{९९३६०}$ (१५) $\frac{११}{१८}$, $\frac{५}{९}$, $\frac{५०}{९९}$
(१६) $\frac{११}{२१}$, $\frac{१८}{३५}$, $\frac{७}{१५}$ (१७) $\frac{४७}{६०}$, $\frac{५५}{७२}$, $\frac{७३}{९६}$, $\frac{२९}{४०}$ (१८) $\frac{१९}{२८}$, $\frac{३५}{५२}$, $\frac{५०}{९१}$, $\frac{२३}{४२}$ (१९) $\frac{८}{२१}$ (२०) $\frac{१३}{४०}$ (२१) $\frac{२९}{३०}$, $\frac{२६}{२८}$, $\frac{२३}{२४}$ (२२) $\frac{१८}{३५}$, $\frac{२५}{४९}$, $\frac{१५}{२८}$
(२३) $\frac{१६}{३५}$, $\frac{१७}{४०}$, $\frac{७}{२४}$ (२४) $\frac{१७}{१२०}$, $\frac{५}{४८}$, $\frac{७}{७२}$ (२५) $\frac{२४}{२५}$ (२६) $\frac{१६}{३५}$
(२७) $\frac{२१}{५६}$ (२८) $\frac{३५}{७७}$ (२९) $\frac{२७}{८९}$ (३०) $\frac{२९}{१२०}$।

अभ्यास २९

(१) $\frac{३}{४}$ मन (२) १$\frac{१}{८}$ सेर (३) $\frac{७}{८}$ गज़ (४) $\frac{१}{३}$ फु० (५) $\frac{१९}{३४}$ रु०
(६) १$\frac{३}{२०}$ घं० (७) १$\frac{१}{२८}$ दिन (८) $\frac{१९}{३६}$ गज़ (९) $\frac{४१}{४५}$ मिनट
(१०) $\frac{४३}{४८}$ सेकण्ड (११) $\frac{१}{२}$ (१२) १$\frac{१}{२४}$ (१३) $\frac{४९}{७२}$ (१४) १$\frac{७}{१२}$

(१५) १० ३/१० (१६) १० ३/२० (१७) ३ १३/३० (१८) ५ ४/५ (१९) ८ २/९
(२०) ११ ५/१६ (२१) ३/४ (२२) ३० ११/१२ (२३) ४१/१०० (२४) पूरी पूँजी
(२५) २ ३३/४० मन (२६) ११ रु० २ ३/४ आ० (२७) १ गज
(२८) २३/३० गज (२९) ४१ घंटे (३०) १० १/४ आने।

अभ्यास ३०

(१) २ ४७/१८० इंच (२) १ ३५/४८ रु० (३) १ ११/१५ मील (४) १ ३७३/४०० घं० (५) २ ११/४८ सेर (६) २ २६७/४०० मन (७) २४ ५/८ रु० (८) १० ५/४८ रु० (९) १० ३९/४५ (१०) ८१ ३७/७२ (११) ८ घं० १२ मिनट २० से० (१२) २ २७/३२ मि० (१३) १० मि० ५२ १/२ से० (१४) २१ गज ५ १/२ इं० (१५) १८ म० १४ से० ११ ७/१५ छ० (१६) १५ से० ६ २/३ छ० (१७) ५ ३९१७/५०४० (१८) ६ मि० २३ २१/४४ से० (१९) ७५३/७७० (२०) १ ६४१/१४०० (२१) १६३/३०० (२२) ७ ६३/८० मन (२३) १९२ २१/२४ रु० (२४) ७ ७७/१०८ गज (२५) २६५ ११/१८ रु०।

अभ्यास ३१

(१) १/३० फु० (२) १/१२ रु० (३) १/२४ (४) ११/६० घं० (५) १/२ इं० (६) १/७२ गज (७) २३/४८ रु० (८) २५/२८ रु० (९) २ १/६० मि० (१०) २ १/१८ गज (११) ४ १/२० (१२) १/६ (१३) ५१/६० (१४) ६ १/१२ (१५) १ १/१६ (१६) १ ५/४८ (१७) ३७/५६ (१८) १/७ (१९) २ ५/१० (२०) ३ ३/१० (२१) ३/२० (२२) १/२४ मन (२३) १/६ मन (२४) १/७२ मील (२५) १ १६/२५ (२६) १ ३/२० (२७) १२ १/२४ गज (२८) ७/१० (२९) ११/२० (३०) ५/१२ घंटे।

अभ्यास ३२

(१) १ १२३/३९२ (२) १/४२ (३) १ १/१४ (४) ८ २/९८ (५) १५७/४८८ (६) ११२/२७५ (७) ३ ४/९९ (८) १ ६५/९६ (९) ३ ४३/५८ रु० (१०) ३ ५/३२ रु० (११) ३ १/१०२ (१२) ३ ३/२० फु० (१३) २५०/२६४ (१४) २ ४३/४८ सेर (१५) २ ४१/५१ गज (१६) २ १/६० मि० (१७) १ ४/२१ (१८) १५ २२/१९ (१९) ३२ १४/५५

(२०) १ १४९/२६४० (२१) ५ ३/४० (२२) ४ ६७/१०० (२३) ४ ७/२४ (२४) २ ११२३/४८३६ (२५) १३ ३७/४० (२६) ५ ५/१४ (२७) ९ १/८० (२८) ३ ३/७० (२९) ९ ६७/१९२ रु० (३०) ४७७/१२०० मन (३१) २/३० मन (३२) २ १४/३३ (३३) ७/३० (३४) ७७/१४४ (३५) ६ ७/४८ गज़ (३६) ५/१२ (३७) ३/८ (३८) ७/२४ (३९) १/२० (४०) ३/२८

अभ्यास ३३

(१) २/३ इंच (२) ३/४ इंच (३) १/७ (४) १ ७/९ गज़ (५) १ रु० १४ आना (६) ३ मन ८ सेर (७) १०/११ (८) १ मन ३० सेर (९) ६ सेर (१०) १ सेर १२ छ० (११) ५ रु० (१२) ७ फ़ुट (१३) ८ फ़ुट (१४) १ गज़ २ फ़ुट ६ इंच (१५) ३२ सेर (१६) ४ रु० १० आ० ८ पा० (१७) २ रु० १० आ० (१८) ४ मन १५ सेर (१९) ३ रु० ६ आ० (२०) ३४ फ़ुट।

अभ्यास ३४

(१) ३११ १/४ गज़ (२) ४० (३) १/४ (४) २ रु० ६ पा० (५) ३ मील (६) २८ इंच (७) ३/३ (८) १/४ (९) ५/१२ (१०) ३/१६ (११) २१ १/३ गज़ (१२) १ गज़ (१३) २ मन (१४) ४/५ मन (१५) ४ ४/५ घं० (१६) २५५ रु० (१७) ९४ ७/८ मील (१८) १२ सेर ४ छ० (१९) ८३ १/२ मन (२०) ९२ ७/१० (२१) १७ ३/५ (२२) १६५ ३/४ (२३) १० (२४) ४० (२५) ४ (२६) ३२/३६३ (२७) ४०३ ५/१२ (२८) ६० (२९) ८६ १/४ (३०) ३६ (३१) ३६ १/३ (३२) १५ ६५/८१ (३३) ४० (३४) २४ ४/१५ (३५) ३७ १४३/४०८ (३६) १८ ७/१० (३७) ८/४५ (३८) १३३/५४० (३९) ३० १/२ (४०) २६ (४१) १०/२४ (४२) ३१/७० (४३) १ ७/३२ (४४) १/२८ (४५) १ ७/३२ (४६) २ (४७) २/३ (४८) १/५ (४९) १ १/२ (५०) ५।

अभ्यास ३५

(१) १/६ इं०। (२) १/८ फ़ुट। (३) १/४ रु०। (४) २४ आने। (५) ५ सेर। (६) १/२ मन। (७) १२ १/२। (८) १ १/२ (९) २।

(१०) २$\frac{१}{२}$ । (११) $\frac{१}{२}$ रु० । (१२) $\frac{७}{१०}$ रु० । (१३) $\frac{३}{४०}$ मन । (१४) १८ मरतबा । (१५) ५ टुकड़े । (१६) २$\frac{१}{४}$ फु० । (१७) ४० बार । (१८) ५ टुकड़े । (१९) ४$\frac{१}{२}$ रु० । (२०) ४$\frac{१}{३}$ रु० ।

अभ्यास ३६

(१) $\frac{३}{१३}$ । (२) $\frac{१}{२७}$ । (३) $\frac{१}{२४}$ । (४) १ । (५) $\frac{१}{१०}$ । (६) १$\frac{१}{२}$ । (७) ४$\frac{३४}{३७}$ । (८) $\frac{१}{१३}$ । (९) १$\frac{१}{३२}$ । (१०) १२$\frac{४}{७}$ । (११) $\frac{२}{४४}$ । (१२) १$\frac{१}{४}$ । (१३) $\frac{४}{७}$ । (१४) १$\frac{२}{५}$ । (१५) $\frac{३२}{११}$ । (१६) $\frac{११}{१२}$ । (१७) १ । (१८) २$\frac{३}{५}$ । (१९) $\frac{३१}{२५}$ । (२०) १०$\frac{११}{४४}$ । (२१) १०८० रु० । (२२) $\frac{१}{२}$ रु० । (२३) १$\frac{१}{३}$ मन । (२४) १६ मोल । (२५) १६ मजदूर (२६) ४ सफे । (२७) ९ क़दम । (२८) ५३ दिन । (२९) $\frac{१}{४}$ । (३०) ७ । (३१) ३$\frac{३}{७}$ । (३२) १४ बार, ३४ बार । (३३) १$\frac{४१}{५१}$ । (३४) ४$\frac{७}{२८}$ । (३५) २६$\frac{२}{५}$ (३६) २$\frac{२}{३}$ रु० (३७) २$\frac{२}{३}$ गज । (३८) १४ आदमी । (३९) १०$\frac{३}{४}$ मी० (४०) ९० आदमी ।

अभ्यास ३७

(१) $\frac{१}{१४७}$ (२) $\frac{३५}{३२}$ । (३) $\frac{९५}{२८०४}$ (४) ६$\frac{१}{३}$ । (५) $\frac{३}{४}$ । (६) ४$\frac{१}{४}$ । (७) $\frac{११}{२८}$ । (८) ४$\frac{१}{८}$ । (९) १$\frac{१}{४}$ । (१०) $\frac{१२५}{१३२}$ (११) $\frac{८७}{१२०}$ । (१२) $\frac{५}{१२}$ । (१३) २$\frac{२}{३}$ । (१४) १$\frac{७१}{३५०}$ । (१५) ३$\frac{२२}{३५}$ । (१६) ० (१७) $\frac{१२५}{२६४}$ । (१८) ७$\frac{६}{५}$ । (१९) ३$\frac{१}{५}$ (२०) ५$\frac{११}{२१}$ ।

अभ्यास ३८

(१) १$\frac{२७}{२५}$ । (२) $\frac{२४}{८७}$ । (३) ६$\frac{५१}{१६}$ (४) १ । (५) $\frac{१}{१६}$ । (६) १४ । (७) $\frac{४१}{१३३}$ । (८) १६ । (९) ११ । (१०) ६$\frac{१}{३}$ । (११) २$\frac{१७}{१०}$ । (१२) ३$\frac{१}{१२}$ (१३) ११$\frac{७}{२०}$ । (१४) १$\frac{१}{७}$ । (१५) $\frac{३}{४}$ । (१६) १५$\frac{१}{८}$ । (१७) ३$\frac{१}{२}$ । (१८) $\frac{१}{२}$ । (१९) ८३$\frac{३१}{४०}$ (२०) १$\frac{५३}{६७}$ ।

अभ्यास ३९

(१) १/३ (२) १, ३/८ (३) ३०/८३ (४) १/९ (५) १ ११/१६ (६) ४ १/२ (७) ५/१२ (८) ३७/१०८ (९) ३३/३८ (१०) २५ ७/१० (११) ७ १/२ (१२) ३ १/२४ (१३) १ ३९/२१ (१४) २ २/५ (१५) ३/४ (१६) १९ ३५/७३ (१७) ६ २०/३७ (१८) ४ ४०/१०७ (१९) ६७/८१२ (२०) २३३०१/६०२६७ ।

अभ्यास ४०

(१) १॥) (२) १॥-)४ (३) १)६ (४) १ ग० २ फी० (५) २४ मि० (६) १ फ़ु० ८ इ० (७) ५) (८) ७) (९))२॥।= (१०) ० (११))४॥ (१२) १५ लड़के (१३) १ गज १ फ़ु० ८ इंच (१४) २ घं० २० मि० (१५) ७॥) ।

अभ्यास ४१

(१) १२३ (२) ९१८॥≡) (३) ३२२६०।) (४) ३१००।=)८ (५) ७१३॥≡)२ (६) ९२५।≡)३ (७) ११।)१।- (८) ८६)८ (९) ४०।।) (१०) १।)१।। (११) ६।।।) (१२) ८।≡)८ (१३) १।।।-) (१४) ८५।=) (१५) ४-)१ (१६) ६२१।।।=)६ (१७) ८) (१८) ।)६ (१९) ३६०) (२०) ८१०-)८

अभ्यास ४२

(१) १/८, ३/८, ५/८, ३/४ (२) १/३, २/३, १/१२, १/६ (३) १/६, १/६, १/४, १/२ (४) १/१६, १/४, ५/८ (५) १/६, १/३, १/४, १/२, ३/४ (६) १/३, ५/१२, २/३, १/४० (७) ३/८, ५/१६ (८) ३/१६, ५/१६, ३/८, ७/१६ (९) ६४ (१०) १८) (११) ५/१२ (१२) ३/५ (१३) २/३ (१४) ७/१२ (१५) १७॥)

अभ्यास ४३

(१) ११/४२ (२) ३ ३/५४ (३) १ ९५/४६४ (४) १ १५९/६३६ (५) २/५ (६) ३६०/४४१ (७) ११/२८ (८) १/४० (९) २/५ (१०) ६ ४३/८४ (११) १/२६ (१२) १ ४३/८८

(१३) ७३४/१३३१ (१४) ९ बार (१५) २९५५/८२६४ (१६) ३३/३८ (१७) २१३/८६० (१८) ४/७५ (१९) ३/८८ (२०) ४३ ।

अभ्यास ४४

(१) २ (२) ४ १/६ (३) १ ६४/९९ (४) ५ (५) ६/११ (६) ६२३७ (७) ९१) घोड़े का, १४) जीन का (८) ५२ १२/२३ रु० (९) ४८७ १/८ रु० (१०) १४४) (११) ११०) (१२) ८ हफ्ते (१३) ७५०००) (१४) २ १/३ गज (१५) १५ सेर ५ छ० (१६) ३३ गज, ७ १/३ गज (१७) १२> (१८) १॥|=) (१९) –) (२०) १४) (२१) १८०) (२२) ३० फ़ीट (२३) ७/३० (२४) ३ १७/३० (२५) २२ दि० २२ १७/३० घं० (२६) १८३३३।–)४ (२७) ८ (२८) २५२> (२९) ३ ३३/४० (३०) ४८।

विविध प्रश्नावली

अभ्यास ४५

(१) ३००१०९०० । (२) १८२ रु० ८ आ० । (३) ८९७ । (४) २२४० । (५) १ ६७/९९ । (६) ६२७४८० । (७) ६७८३ । (८) २६४३२० । (९) ९८७ गुना । (१०) ४४ रु० १४ आ० ९ पा० । (११) ३५७१ । (१२) १०९०९ । (१३) ३५ फ़ीट (१४) ११२ रु० । (१५) ६ । (१६) ७९२००० और १०० । (१७) १३९८६ (१८) १७७६३ रु० और ११८४२ रु० । (१९) ६६० गज, ५६० गज, ७५४ ३/७ गज और ३६९६० गज । (२०) २६०० रु० । (२१) ३८३३ । (२२) ८९ रु० ८ आ० १० पा० । (२३) ७२, ९६, १२०, १४४, १६८, १९२, २१६ और २४० । (२४) ३ म० ३४ सेर ९ छ० । (२५) १/३ । (२६) ६३ रु०, ५५ रु० और ४५ रु० । (२७) १/१० । (२८) ३६० मील । (२९) ७७०६९३३३५२ । (३०) २० ४/७ । (३१) १ रु० ६ आ० ४ पा० । (३२) १४४ । (३३) १/१० । (३४) ६००० । (३५) ६ म० ६ से० १० २/३ छ० । (३६) ५ ३३/६० गज ।

(३७) ८०७३ । (३८) ५२ । (३९) ८ आ० । (४०) ३०३५ रु० ४ आ० । (४१) १०५० । (४२) ६$\frac{४}{२८}$ । (४३) १२०२ । (४४) $\frac{१}{१२}$ । (४५) १८० फ़ीट । (४६) १०५ । (४७) ६ रु० १० आ० ३ पा० । (४८) ३७५० रु० । (४९) ११$\frac{३}{७}\frac{१}{४}$; $\frac{१९}{४२०}$ । (५०) ५३८८ रु० १३ आ० ।

दूसरा भाग

अध्याय १

अभ्यास १

(१) १८० (२) ९९९९ (३) ५१२६८५ (४) २१८५ (५) ४९६ (६) १०१६ (७) १५४३२००० (८) १०७७४००९०८ (९) ६१५० (१०) १५ ।

अभ्यास २

(१) ९।।)९ पा० (२) ९४ लड़के (३) ८१ टुकड़े, २ फ़ी० ३ इं० रस्सी (४) ७ गाय (५) ४-)१० (६) ५ से० १ छ० (७) १५ सेर ४$\frac{४}{५}$ छ० (८) २६०७।।।=)३ (९) ४०९५ (१०) १५ सेर १५ छ० ।

अभ्यास ३

(१) २, ३, ४, ६; २, ४, ८; २, ४, ५१०; २, ३, ५, ६, १०, १५; २, ३, ४, ६, ९, १२, १८ । (२) २ × २ × ३; ३ × ५; २ × २ × ५; २ × ३ × ५; २ × ३ × ७ । (३) १४, २१, २८, ३५, ४२, ४९, ५६, ६३, ७०, ७७, ८४, ९१, ९८; १८, २७, ३६, ४५, ५४, ६३, ७२, ८१, ९०, ९९; २०, ३०, ४०, ५०, ६०, ७०, ८०, ९०; २४, ३६, ४८, ६०, ७२, ८४, ९६; २६, ३९, ५२, ६५, ७८, ९१ । (४) १०, २०, ३०, ४०, ५०, ६०, ७०, ८०, ९०, १०० । (५) १२, १८, २४, ३०, ३६, ४२,

४८, ५४, ६०, ६६, ७२, ७८, ८४, ९०, ९६। (६) १२, २४, ३६, ४८, ६०, ७२, ८४, ९६। (७) १२, २४, ३६, ४८, ६०, ७२, ८४, ९६। (८) १२। (९) ३६। (१०) ८०। (११) १३। (१२) १२ रु०। (१३) ५८। (१४) १०५। (१५) १२०।

अभ्यास ४

(१) ३ × ५ × ७ (२) ५ × ३ × ११ (३) १३ × ५ × ३ (४) ५ × ७ × ११ (५) २ × ३ × ५ × २ × ३ × ११ (६) २ × ३ × २ × २ × ३ × ११ (७) ११ × ११ × ५ × ३ × ३ (८) ५ × २ × ११ × ३ × ३ × २ × ३ (९) ३ × ३ × ५ × ७ (१०) ५ × ५ × ३७ (११) ५ × ७ × ३७ (१२) ५ × ११ × ३७ (१३) २५, ५०, ७५, १००, १२५, १५०, १७५, २०० (१४) ३५, ७०, १०५, १४०, १७५ (१५) ४२, ८४, १२६, १६८ (१६) १२०, २४०, ३६०, ४८० (१७) १४०, २८०, ४२० (१८) २४५, ४९० (१९) १२६० (२०) २७०० (२१) ३२४ (२२) २०७९ (२३) ३१५ गज (२४) ८९ भेड (२५) ४२० आम, ११)।

अभ्यास ५

(१) (अ) ११) (ब) १६ सेर (द) २ फुट। (२) $\frac{२}{१०}$, $\frac{३}{१५}$, $\frac{४}{२०}$, $\frac{५}{२५}$, $\frac{६}{३०}$। $\frac{३}{२७}$, $\frac{४}{३६}$, $\frac{६}{५४}$, $\frac{८}{७२}$। (४) (अ) $\frac{६}{१२}$ और $\frac{९}{१२}$। (ब) $\frac{४५}{६०}$, $\frac{३६}{६०}$, $\frac{४०}{६०}$, $\frac{६}{१२}$, $\frac{९}{१२}$, $\frac{१०}{१२}$, $\frac{११}{१२}$। (५) $\frac{३७}{६०}$ रु०। (६) $\frac{१}{२}$। (७) $१\frac{२}{३५}$ मन (८) $\frac{१०}{३५}$। (९) $४१\frac{३}{४}$। (१०) $१४\frac{३}{८}$ रु० (११) $३\frac{१}{५}$ सेर (१२) $\frac{३}{४}$ सेर (१३) $१\frac{३}{६}$। (१४) $७\frac{१}{२}$ मील (१५) $\frac{३}{४}$। (१६) $\frac{७}{१५}$। (१७) $\frac{२३}{२८}$, $\frac{३७}{२८}$। (१८) $\frac{३}{४}$। (१९) $\frac{१७}{२७}$। (२०) $\frac{३}{१२}$।

अभ्यास ६

(१) $\frac{६३०}{१५७५}$, $\frac{७३५}{१५७५}$, $\frac{६९३}{१५७५}$, $\frac{१०३५}{१५७५}$, $\frac{१०८५}{१५७५}$ (२) $१४\frac{३१}{३५}$ (३) $३४\frac{१३}{४४२}$ (४) $६\frac{०१}{९७}$ (५) ९॥)३ (६) $\frac{७५७}{१४२८}$ (७) $१०\frac{२३०}{४१२}$ (८) $\frac{१७}{२५}$ (९) १९।≡)६ (१०) १० फोट (११) ७)७॥= (१२) $\frac{१}{५}$

(१३) ३७'॥ पहले को, ६१॥≥)॥ दूसरे को (१४) $\frac{९}{१६}$ (१५) $\frac{३}{४}$ (१६) १ घं० ३३ मि० ५२ से० (१७) ४$\frac{१}{४}$ (१८) ५२ मील (१९) ३८। (२०) २२२४≈) (२१) ३८$\frac{२}{३}$ (२२) ६३ नीबू; पहले को २७, दूसरे को २८, तीसरे को ८ (२३) पहला ३५), दूसरा ४९), तीसरा ९८), चौथा ६३। (२४) ५२५० पैसे (२५) १८० आम; पहला ७५, दूसरा ५५, तीसरा ५०।

अध्याय २

अभ्यास ७

(१) ५० पै०। (२) ७ आने। (३) ३ रु०। (४) २ रु० १० आ० (५) २४ आम। (६) १ सेर ८ छ०। (७) ४०० गज़। (८) १ मो० १०५६ गज़। (९) १० सफ़े। (१०) ६० रु०। (११) १० रु०। (१२) १६ रु०। (१३) ११ आ० ६ पा०। (१४) ३ सेर १२ छ०। (१५) ७ सेर ८ छटाँक। (१६) १६ गज़। (१७) १० वरक। (१८) १ घं० (१९) ३३$\frac{१}{३}$ मील। (२०) २ आने।

अभ्यास ८

(१) ५ रु०। (२) १ रु० ८ आ० (३) २१ रु० २ आ० (४) ३ रु०। (५) १ रु० २ आ०। (६) १२० रु०। (७) २ रु० ६ आ० ४$\frac{५}{६}$ पा०। (८) ५ मन २२ से० ८ छ०। (९) २३ रु०। (१०) ९ सेर (११) १२० मील (१२) ३९२ रु० (१३) ९ रु० ६ आ०। (१४) ११ रु० १४ आ० (१५) १३९ रु० १ आ०। (१६) १२ रु० ६ आने। (१७) ११ आने ८ पा०। (१८) १ रु०। (१९) १५०० रु०। (२०) १०४ बीघा। (२१) ४ मि० ४८ से० (२२) १०$\frac{२}{३}$ मी०। (२३) ८५ रु० १२ आ०। (२४) ७५६ मी०। (२५)।२०९ मी०। (२६) ४५ म० १ से० ९$\frac{३}{८}$ छ०। (२७) ११२ रु० ८ आ०। (२८) $\frac{२}{९}$। (२९) ३५ दिन। (३०) १३$\frac{१}{२}$ दिन।

अभ्यास ९

(१) ६$\frac{२}{३}$ दिन। (२) १$\frac{१}{२}$ दिन (३) १ लड़का। (४) १२ आदमी (५) ३ दिन। (६) १२ दिन। (७) ३ दिन । (८) ३ घंटा। (९) ३ मील। (१०) ४ घटा। (११) ४ दिन। (१२) १८ मि०। (१३) १२ घोड़ों। (१४) १$\frac{१}{२}$ घंटा। (१५) ४५ मील।

अभ्यास १०

(१) ४ दि०। (२) ६ आदमो। (३) ९० आदमो। (४) ३० आ०। (५) ३० दिन। (६) ११$\frac{२}{३}$ दि०। (७) ४$\frac{५}{६}$ दि०। (८) २४ दि०। (९) १० आ०। (१०) १५ आ०। (११) २५ आ०। (१२) २८८ आ०। (१३) ३२$\frac{३}{५}$। (१४) २० दि०। (१५) ३ घं०।

अध्याय ३

अभ्यास ११

(१) |||≡) (२) |||−) ४ (३) ||≡)| (४) १||=)८ पा० (५) ३) (६) २||=)|| (७) १२||) (८) १८|||) (९) ३७||) (१०) ७५) (११) ६|) (१२) १८|||) (१३) ४०) (१४) ७५) (१५) १२०)।

अभ्यास १२

(१) ५||=) (२) ३५=|| (३) ६८|||) (४) २०२||) (५) १३१|) (६) १८३|||) (७) ५≡)४ (८) ९४=) (९) १७४||−)९ (१०) ९२||) (११) ७९||≡); ७५ ||≡) (१२) ११७≡); ४५०||)४ (१३) ३४८|||≡)४; १४६५||=) (१४) ७४७||=)९$\frac{३}{४}$, २४६८)९$\frac{३}{४}$ (१५) ४२१|||=); ११७१|||=) (१६) १७६||=)८ (१७) १२१८|||) (१८) ७५९) (१९) ३०८५ ||≡) (२०) ३१५=)१$\frac{१}{२}$

अभ्यास १३

(१) ८) (२) १५) (३) २४। (४) ३५) (५) ४) (६) ३६ (७) ५६) (८) १६५) (९) १४४) (१०) ३०) (११) २८०); ९८०) (१२) १६८); ९६८) (१३) २४०); ८४०) (१४) १६२); १०६२) (१५) ९०); १०९०)

अभ्यास १४

(१) ७०) (२) ४०॥=) (३) ४५) (४) ४२॥)४ ४/५ (५) १२०) (६) ८७।)६ (७) १८=) (८) १७६।=)४ ४/५ (९) ७॥)१० २/३ (१०) १६९≡)२ २/५ (११) ४१॥।)६ ६/२५ (१२) ३८—); ४३८८—) (१३) २२९=)८; २९७९=)८ (१४) २५५); ४२५५) (१५) १०७॥=)३ ३/४; १६७७।)३ ३/४ (१६) ४३॥।) (१७) १३८९) (१८) ६५॥=) (१९) १८५२) (२०) ३९३७॥)

अभ्यास १५

(१) १॥)२ (२) १०॥)१० (३) १४१॥=) ८ (४) ३=) (५) २४५॥।—)४ (६) ७॥≡)७ (७) ६०—)८ (८) ११७।≡)५ (९) ८॥।—)७ (१०) १३॥) (११) १०४५) (१२) १५३१॥) (१३) ८६।=)५ (१४) १५०१॥।)२ (१५) २३३॥।)

अभ्यास १६

(१) ५ प्रतिशत (२) १० प्रतिशत (३) ६ प्र० श० (४) ४ प्र० श० (५) १० प्र० श० (६) ७ प्र० श० ।७ १० प्र० श० (८) १२ प्र० श० (९) ३ ३/४ पाई प्रतिरुपया (१०))॥ प्रतिरु० (११))। प्रतिरु० (१२))। प्रतिरु० (१३) ५ प्रतिशत (१४) १० प्रतिशत (१५) ४/५ पाई।

अभ्यास १७

उत्तर प्रतिशत प्रतिवर्षों में :—

(१) ७ (२) ५ (३) ४ १/६ (४) ४ १/२ (५) ४ १/४ (६) ७ (७) ९

(८) ४ (९) ६$\frac{१}{४}$ (१०) ४$\frac{४६९}{९२९}$ (११) १५ (१२) ५ (१३) ५ (१४) १२$\frac{१}{३}$ (१५) ७$\frac{१}{२}$ ।

अभ्यास १८

उत्तर वर्षों में :—

(१) ४ (२) ४ (३) ५ (४) ५ (५) १० (६) ४ (७) ४ महीना या $\frac{१}{३}$ (८) १ (९) २० (१०) १२ ।

अभ्यास १९

(१) १ साल (२) ५ साल (३) ३ साल (४) ५ साल (५) ५ साल (६) २ साल (७) २$\frac{१}{६}$ साल (८) २० साल (९) ८ साल (१०) १$\frac{१}{६}$ साल (११) ४ साल (१२) ४ साल (१३) ४$\frac{३}{७}$ साल (१४) १३ अगस्त १९३० ई० (१५) ४$\frac{१}{६}$ साल । (१६) ६ साल । (१७) ३ साल । (१८) ४ साल ५ म० १० दिन । (१९) ६ साल ८ म० । (२०) तीसरी मार्च सन् १९३६ ई० ।

अभ्यास २०

(१) ३५०० रु० । (२) ३०० रु० । (३) ६०० रु० । (४) १००० रु० । (५) ३०० रु० । (६) ४०० रु० । (७) १००० रु० । (८) १००० रु० । (९) १५० रु० । (१०) ५०० रु० ।

अभ्यास २१

(१) ३१५ रु० । (२) २०० रु० । (३) ६०५० रु० । (४) १३३३ रु० ५ आ० ४ पा० । (५) २२ रु० १२ आ० ७ पा० । (६) २०० रु० । (७) ६५ रु० ३ आ० ६ पा० । (८) ३२०० रु० । (९) ६००० रु० । (१०) ३४८४०९$\frac{१}{११}$ रु० । (११) ६१७ रु० ५ आ० ९ पा० । (१२) ६१७ रु० ९ आ० । (१३) १०२०० रु० । (१४) २०० रु० । (१५) २५० रु० ।

अध्याय ४

अभ्यास २२

(१) २२ रु० ८ आ०। (२) २० रु०। (३) १५ रु० १० आ०। (४) १०५ रु०। (५) ४९ रु०। (६) २५ रु०। (७) १६२ रु० ८ आ०। (८) १०५ रु०। (९) ५२ रु०। (१०) २०८ रु०।

अभ्यास २३

(१) ९ रु० ६ आ०। (२) २२ रु० ८ आ०। (३) ३६ रु०। (४) ५२ रु० ८ आ०। (५) २१८ रु० १२ आ०। (६) २९० रु० ४ आ०। (७) ३६२ रु० ८ आ०। (८) ६४६ रु० १४ आ०। (९) ७३४ रु० ६ आ०। (१०) १०५० रु०। (११) ७८७ रु० ८ आ०। (१२) १३५० रु०। (१३) १५६० रु०। (१४) १९६० रु०। (१५) ५ रु०। (१६) १० रु०। (१७) १३ रु० २ आ०। (१८) ५ रु०। (१९) १५ रु०। (२०) १८ रु० १२ आ०।

अभ्यास २४

(१) $\frac{१}{१२}$। (२) $\frac{१}{३}$। (३) $\frac{१}{६}$। (४) $\frac{१}{२}$। (५) $\frac{१}{३२}$। (६) $\frac{१}{१६}$। (७) ८ आ०। (८) ५ आ० ४ पा०। (९) २ आ० ८ पा०। (१०) २ आ०। (११) १ आ० ४ पा०। (१२) ४ इं०। (१३) ३ इं०। (१४) १६० गज़। (१५) २२० गज़। (१६) ५ सेर। (१७) $\frac{३}{४}$। (१८) $\frac{१}{१६}$। (१९) $\frac{१}{२२}$। (२०) $\frac{१}{५}$।

अभ्यास २५

(१) २० रु०। (२) ३० रु०। (३) २० रु०। (४) ७ आ०। (५) १ रु० २ आ०। (६) २ रु०। (७) १२ रु०। (८) २८ रु०। (९) २४ रु०। (१०) ७ पा०। (११) २५ रु०। (१२) १०० रु०। (१३) १२१ रु०। (१४) २ रु० ९ आ० ७ पा० (निकटतम पाई तक)। (१५) ११ आ० ६ पा०।

अभ्यास २६

(१) ३३७ रु० ८ आ०। (२) १८५ रु० १३ आ० ९ पा०। (३) ३०२ रु० ८ आ०। (४) ५४१ रु० १० आ०। ८ पा०। (५) ९०१ रु० १ आ० ६ पा०। (६) १५०० रु०। (७) १४६४ रु० ९ आ०। (८) ३५८९ रु० ३ आ० ६ पा०। (९) ४८६ रु० ४ आ०। (१०) ९०० रु०। (११) ८४७ रु० ५ आ० ४ पा०। (१२) ६१५। रु०। (१३) ११८३ रु० १० आ० ८ पा०। (१४) १८६३ रु०। (१५) ३३०१ रु० ७ आ० ४ पा०। (१६) ६३ मन। (१७) २२६ रु० १० आ० ८ पा०। (१८) ७७७ रु०। (१९) ३५८ मन १७ सेर ८ छटाँक। (२०) २८० मन (२१) ८७० मन। (२२) १५२ मन १३ सेर १२ छटाँक। (२३) ९९ मन। (२४) १२७२ गज २ फ़ीट ९ इंच। (२५) १६७ मन ३२ सेर ८ छटाँक।

अभ्यास २७

(१) ८६ रु० ८ आ० ६ पा०। (२) १०५ रु० १ आ० ६ पा० (निकटतम पाई तक) (३) ३३ रु० १० आ० ४ पा० (निकटतम पाई तक) (४) ६५ रु० १ आ० ७ पा० (निकटतम पाई तक) (५) ४४ रु० (निकटतम पाई तक)। (६) ११४ रु० १ आ० १० पा० (निकटतम पा० तक) (७) ७६ रु० ५ आ० १०$\frac{2}{3}$ पा०। (८) २२३ रु० ६ पा०। (९) १०१ रु० १० आ० ९ पा०। (१०) ६ म० १३ सं० ९$\frac{3}{5}$ छ०। (११) ९११ रु० ७ आ० ४ पा०। (१२) २७४ म० २२ से० ८ छ०। (१३) २२१८ रु० ८ आ० ६ पा० (निकटतम पाई तक) (१४) ३० रु० ९ आ० (निकटतम पाई तक) (१५) १९४६८ रु० १२ आ०।

अध्याय ६

अभ्यास २८

(१) २२० रु० ८ आने (२) ३२७ रुपये १३ आने १ पाई (लगभग) (३) २८५ रु० ४ आ० ८ पाई (लगभग) (४) ११५७ रु०

४ आ० ११ पा० (लगभग) (५) ५६८ रु० ० आ० ११ पा० (लगभग) (६) ७५७ रु० ११ आ० ३ पा० (लगभग) (७) ११४ रु० ९ आ० ९ पा० (लगभग) (८) ७७ रु० ६ आ० ९ पा० (लगभग) (९) २२७ रु० १० आ० ९ पा० (लगभग) (१०) ४३१ रु० ० आ० २ पाई (लगभग) (११) ९२ रु० ११ आ० ८ पा० (लगभग) (१२) २५५ रु० १० पा० (लगभग) (१३) ३१ रु० ८ आ० ५ पा० और २३१ रु० ८ आ० ५ पा० (लगभग) (१४) ६५ रु० ९ आ० ११ पा० और ३१५ रु० ९ आ० ११ पा० (लगभग) (१५) ९६ रु० ४ आ० ५ पा० और ५९६ रु० ४ आ० ५ पा० (लगभग) (१६) ६९ रु० ८ आ० ९ पा० और ८१९ रु० ८ आ० ९ पा० (लगभग) (१७) ८६ रु० १५ आ० ७ पा० और ८८६ रु० १५ आ० ७ पा० (लगभग) (१८) २१५ रु० ८ आ० १ पा० और १२१५ रु० ८ आ० १ पा० (लगभग) (१९) १८४ रु० ३ आ० ३ पाई और १४३४ रु० ३ आ० ३ पा० (लगभग) (२०) २६१ रु० ३ आ० ११ पा० और १७६१ रु० ३ आ० ११ पा० (लगभग) (२१) २३२ रु० ९ आ० और २२३२ रुपये ९ आने। (२२) ६०५ रुपये ११ आ० १० पा० और ३१०५ रु० ११ आ० १० पाई (लगभग) (२३) १ रु० १५ आ० २ पा० (लगभग) (२४) ३००० रुपये (२५) ७३२०५।

अध्याय ७

अभ्यास २६

(१) ॥–)७ (निकटतम पाई) (२) २७३२॥–) (३) सबसे बड़ी ५/२८, सबसे छोटी २३/१९६ (४) ३ १/२ (५) ९ मर्द, नौ औरत, ९ बालक (६) २ १/७ ३/२ (७) २४ रुपये, ३६ दोअन्नी, ९६ पैसे (८) २ ५/२६, १३ (९) ३/६ ३/२ (१०) २५≡)९ (११) ३१२॥) (१२) १५६८०) (१३) ८७५≡)२ (निकटतम पाई) (१४) ५० फ़ीट (१५) १३३३।–)४

(१६) ६० दिन (१७) १३$\frac{३}{४}$ घटे (१८) ३६ मील (१९) १५९६ आदमी (२०) ५६।) (२१) ३१५) (२२) ९।) (२३) १६० भेड़ (२४) ७२ दिन (२५) १०० मील (२६) २१।=)९ (२७) २॥≡)९ पाई (२८) १३२ गज़ (२९) १॥-) (३०) ६० गज़ (३१) ६।=); २१।=); १८॥=) (३२) ३० गाय (३३) $\frac{३}{४}\frac{३}{८}$ मन (३४) ३०४७४) (३५) ४५० गज़ (३६) ४ आदमी (३७) १६ घं० २८ मि० (३८) ४८॥)६॥।= (३९) ९२०।≡)॥ (४०) २७५-) (४१) २४३ गज़ (४२) १६२ कमीज़ें (४३) ४५ मील प्र० घ० (४४) १ साल (४५) २० मि० पहले (४६) ४० गज़ (४७) ३० दिन (४८) ३३ आदमी (४९) ४२$\frac{२}{३}$ दिन (५०) ६१८$\frac{१}{८}$ गज़ (५१) ३$\frac{३}{४}\frac{३}{८}$ (५२) ६० आम (५३) १२ प्रतिशत (५४) $\frac{१}{८८}$ (५५) १४ टुकड़े; कुछ नहीं। (५६) १८ आदमी (५७) ३२५०) (५८) १२॥≡)१ (५९) ९९ गज़ (६०) ३००८) (६१) ३ घं० (६२) ५१$\frac{१}{३}$ फ़ी० (६३) २६२॥) (६४) ५१०) (६५) ६$\frac{१}{४}$ प्रतिशत (६६) ६३ दिन (६७) ९$\frac{१}{१३}$ (६८) $\frac{३}{१}\frac{५}{२}$ (६९) ४०$\frac{१}{२}$ (७०) २५०) (७१) २८६५९।=) (७२) ३३$\frac{१}{३}$ साल (७३) ४$\frac{१}{२}$ प्रतिशत (७४) २८$\frac{१}{४}$, ५६२॥), ७५) (७५) ३६०० (७६) ४५० बीघे (७७) ३$\frac{१}{२}\frac{३}{४}$ (७८) दूसरी, पहिली, तीसरी (७९) १९≡)६ (८०) ८-) ४$\frac{१}{२}$ पाई (८१) २१६००) (८२) २००) (८३) ७५२।-)७ (८४) ५१०) (८५) ७ जोड़े (८६) ८७५) (८७) १८३२३।-)४ (८८) २४५ टिकटें (८९) २४ मील (९०) १०॥) (९१) ५१२०) (९२) २९८११६ (९३) १५६२५) (९४) ७००) (९७) १६॥=) (९८) १२४।)२॥ (९९) १४॥≡)७$\frac{१}{२}$ (१००) १२१॥=)५ (निकटतम पाई)।